



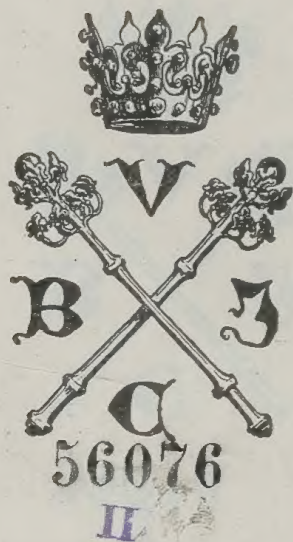
56076

II

Med. St. Dr.

kat.komp.



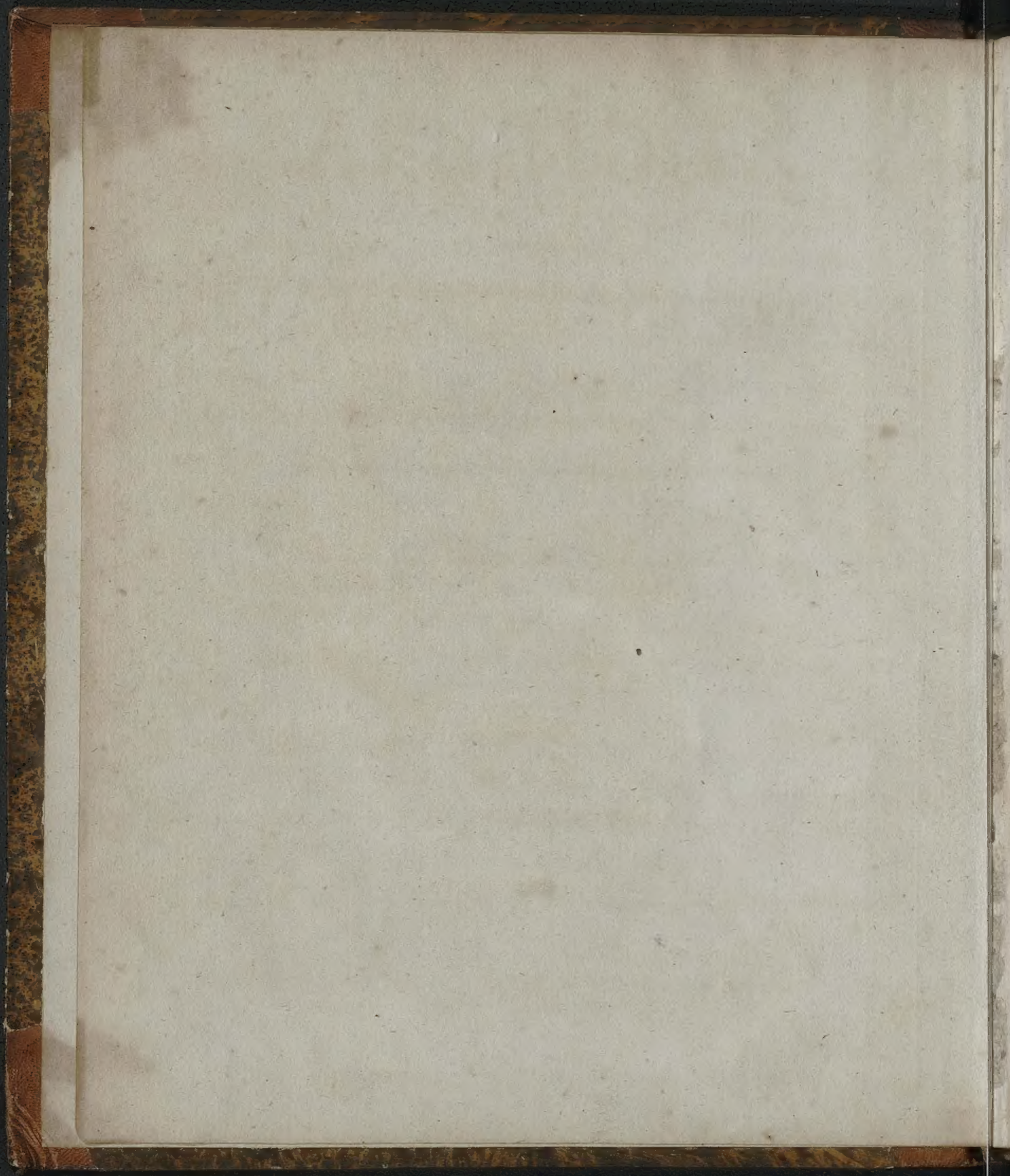


Antiqui 445



1314







L' Huillier Szymon

# ALGIEBRA

DLA

## SZKÓŁ NARODOWYCH.

*Pierwszy raz wydano.*

Nieoprawna . . . . . Zł. 6.

Oprawna w papier . . . . . Zł. 6 gr. 10.



Roku 1782.

w Marywilu u Michała Grölla B. J. K. Mei Nro 24 pod znakiem Połców, i po  
wszystkich Szkołach w Krain.





Dzieło *Algiebra*, ułożone przez Jmci Pana LHUILIER Obywatela Gienewieńskiego, a w Towarzystwie nauk w témże Mieście ustanowione policzonego, które za ogłoszonem w Polsce i w obcych krajach uczonych wezwaniem, z pomiędzy innych potwierdzenie i nagrodę odebrało, od Towarzystwa do Xiąg Elementarnych roztrząsnione, a przez Jmci X. GAWRONSKIEGO Kanonika Krakowskiego Lektora J. K. Mci, i w témże Towarzystwie zasiadającego na Polski język z Francuzkiego przełożone, Szkołóm Narodowym do użycia podług przepisów naszych podaiemy. w Warszawie na Sessyi naszey dnia 2 Października Roku 1778.

IGNACY Xię MASSALSKI, *Biskup Wileński Prezyd.*

MICHAŁ Xię PONIATOWSKI, *Biskup Płocki.*

AUGUST Xię SUŁKOWSKI, *Woiewoda Kaliski.*

JOACHIM CHREPTOWICZ, *Podkanclerzy W. X. Litt.*

MICHAŁ MNISZECH, *Sekretarz W. Litt.*

HYACYNT MAŁACHOWSKI, *Referendarz Koronny.*

IGNACY POTOCKI, *Pisárz W. W. X. Litt.*

ADAM Xię CZARTORYSKI, *Generał Ziem Podolskich.*

JĘDRZĘY MOKRONOWSKI, *Gen. Insp. Woysk Kor.*

STANISŁAW Xię PONIATOWSKI, *Generał Lieut. Woysk Koronnych.*

FRANCISZEK BIELINSKI, *Starosta Czerński.*

ANDRZEY ZAMOYSKI, *Kawaler Orderu Orła Białego.*





## PRZESTROGA DLA NAUCZYCIELÓW.

---

**L**ubo podług ułtaw Prześwietnéy Kommissyi Edukacyynéy, Nauka Algiebry przez ciąg lät trzech miała bydź dawaná, a zaczynaiąc się w Klasse IV. wraz z drugą Jeometryi częścią zabiérać miała iefzcze po dwie godziny na tydzień i w Klasse V. dwuletniéy; że iednak nieprzerwany związek wiadomości Matematycznych, a w szczególności Algiebry, i ciąglé w nich postępowanie od rzeczy iednych do drugih, byłoby istotną przeszkodą dla Uczniów piérwzoletnich, Klasy V, do zrozumienia tych Twiérdzén i Zagadnién, których zrozumienie Ucznióm drugoletnim téyże Klasy iużby łatwieyszé było, iako maiącym do tego wiadomości poprzedzaiące z Nauki podanéy sobie w roku piérwszym téy Klasy; więc za zezwoleniem Prześwietnéy Kommissyi Edukacyynéy takowy czyni się porządek i odmiana względém czasu uczenia Algiebry w Szkołach Wydziałowych, do którey stósować się maią i inné szkoły na trzy tylko Klasy podzieloné.

Gdy w czwártéy Klasse, w piérwszych miesiącach roku szkolného zakończoná będzie piérwszá Część Jeometryi; odłożywszy drugą Część do Klasy Piątéy, zacznie Nauczyciel dáwać zaraz Algiebrę, wyznaczaiąc iey té same godziny, które w Ułtawach są na drugą Część Jeometryi, w raz z Algie-



brą poświęconé. Sześć piérwzych Rozdziałów téy Nauki wyłożyć Ucznióm w tym roku staraniém Jego będzie : pamiętając zawsze na to, aby nie postępował dalej z Uczniami, póki piérwéy nie będzie przeświadczony, że iuż dobrze to, co poprzedziło, poięli. W Piątéy Klafsy piérwzego roku, tymże Ucznióm dawać będzie drugą Część Jeometryi, przypomináwszy im Część piérwszą sposobém w Ustawach wyrażonym. Czas na tę Naukę tén sam má być łożony, który się wyznaczył na Algiebrę podług Ustaw. Gdy na drugi rok ci sami Uczniowie zostaną, i przybędą do nich z Klafsy IV, Uczniowie piérwzoletni ; tak dla tych, iak i dla owych kończyć będzie Nauczyciel Algiebrę, któręy iuż sześciu piérwzych Rozdziałów nauczyć się powinni byli w Klafsy IV, a dla lepszego o tém zapewnienia się powtórzy té Rozdziały, zadając różne z nich Ucznióm zagadnienia. Czas téy Nauki w roku drugim będzie ténże sam, który Przeświétná Kommissyá Edukacyyná iuż w Ustawach swoich przepisała. Tym sposobém i ciąg nieprzerwany Algiebry zachowá się, i co Nauczyciel Matematyki wykládać będzie Ucznióm drugolétnim Klafsy V, to równie i od Uczniów piérwzoletnich będzie mogło być rozumiané : bo tak ci, iak i tamci iednakowé do tego przysposobiénie mieć będą w Klafsy IV.

---



# REIESTR ROZDZIAŁÓW.

---

## ROZDZIAŁ I.

*Zagadnienia, w które jedna tylko niewiadoma ilość wchodzi, i same ilości całkowite* . . . . . karta . . I.

## ROZDZIAŁ II.

*Zagadnienia, w które wchodzi ilości ułamkowe* . . . . . 74.

## ROZDZIAŁ III.

*Zagadnienia, w które więcej wchodzi niż jeden wyraz niewiadomy* . . . . . 110

## ROZDZIAŁ IV.

*Algebra ogólna* . . . . . 139.

## ROZDZIAŁ V.

*O Proporcjach Arytmetycznych i Jeometrycznych ogólnie uważanych* . . . . . 173.

## ROZDZIAŁ VI.

*Zagadnienia drugiego stopnia* . . . . . 188.

## ROZDZIAŁ VII.

*O Ciągach Arytmetycznych* . . . . . 270.

## ROZDZIAŁ VIII.

*O Ciągach Jeometrycznych i o Logarytmach* . . . . . 293.

## ROZDZIAŁ IX.

*Zagadnienia niewyznaczone, i wstęp do Zagadnień Diöfantycznych* . . . . . 334

---

---



# ZBIOR SŁÓW POLSKICH

albo nowych, albo mniej znanych, użytych w tęy Xiędzie, z przydaniami obok słowa-  
mi łacińskimi, też samo w używaniu Matematyków znaczącemi.

Bezistotny	-	-	Imaginarius.
Ciąg	-	-	Progressio.
Czynnik	-	-	Factor.
Istotny	-	-	Realis.
Mianowanie	-	-	Denominatio.
Mnogosc	-	-	Potentia albo Dignita
Nadmiar	-	-	Excessus.
Niedomiar	-	-	Defectus.
Nawias	-	-	Parenthesis.
Odejmnik	-	-	Subtrahendus.
Odejmny	-	-	Minuendus.
Oddzielnie	-	-	Abstracte.
Oddzielny	-	-	Abstractus.
Półdwójny	-	-	Subduplus.
Przerabianie	-	-	Reductio.
Przydanie	-	-	Positivè.
Przydany	-	-	Positivus.
Równanie	-	-	Æquatio.
Równorzeczna	-	-	Parabola.
Rozbiór	-	-	Analysis.
Rozbiorowy	-	-	Analyticus.
Rozwiązanie	-	-	Solutio.
Spółczynnik	-	-	Coefficiens.
Sprawdzenie	-	-	Verificatio.
Strona równania	-	-	Membrum æquationis.
Szereg	-	-	Series.
Tosimosc	-	-	Identitas.
Ujemny	-	-	Negativus.
Układ	-	-	Systema.
Warunek	-	-	Conditio.
Węgielnica	-	-	Norma.
Wielokrotny	-	-	Multiplus.
Wykładnik	-	-	Exponens.
Wymiar	-	-	Dimensio.
Wyraz	-	-	Terminus.
Wyznaczoney	-	-	Determinatus.
Wzajemny	-	-	Reciprocus.



---

# KRÓTKI ZBIÓR HISTORYI MATEMATYCZNEJ.

---

**N** zbytnią i niepodobną byłoby rzeczą zwracać się aż do pierwszych wziętków nauki tak powszechnie użytecznej, iak jest Arytmetyka. Ustanowienie prawa własności, i utworzenie towarzystwa choćby też náy mniejszego, jest Epoką, w którejby szukać należało pierwszych nauki tej szladów. Ale w czasach owych, gdzie rozum grubą jeszcze ciemnotą był pokryty, przestając ludzie na tém, co naglejszym ich potrzebom dogadzało, trzymali się zapewne bardzo nie doskonałego sposobu rachowania swęj trzody, i innych dóbytków, a wiadomości ich w tej mierze, tak szczupłemi były określone granicami, że imienia Nauki ani założyć, ani nosić nie mogły.

Toż sprawiedliwie twierdzić można i o pierwszym Jeometryi wynalezieniu. Jeżeli iednak domyślać się godzi, tedy podobno przed wszystkiemi innemi Narodami Egipcyanie zatrudniali się tą częścią Jeometryi, która do rozmiaru i podziału gruntów się ciąga. Gdy Nil wylewami swemi, zabierał iednym właścicielom pola, a przydawał drugim, potrzeba stąd wynikała dla Egipcyan, wyznaczenia rozległości i położenia każdego gruntu w szczególności, aby rosterki wyniknąć z podobnego zamięszania mogące, łatwiej napotém uspokoić. Prace za panowania Sezoftrysa nakazane, i podjęte około kopania schodzących się kanałów, któremi w różne strony Egipt



był przetrzynięty, i inné tego rodzaju, dostatecznie dowodzą, że już owych czasów nie mało w téj części Jeometrii postąpiono. Zdało się nawet pospółstwu, iż takowá robota, więcéy niż ludzkiego rozumu skutkiem była, i przeto Bóstwu za nią cześć oddawało. Jest nawet do prawdy podobieństwo, że u tychże Egipcyan zawzięła się piérwszy raz Matematyka uważaná, ilé jest Nauką i zbiorem niezawodnych prawideł. Przyczynę tego bardzo pozorną daie Arystoteles, że w tym kraju, mówi on, duchowni uwolnionými byli od gospodariskich zatrudnień, i czas swój doskonaleniu rozumu poświęcali. Twierdzić iednak z pewnością nie można, iak obfzérne były w téj mierze ich wiadomości.

THALES MILEZYUSZ, który żył około 600 roku przed narodzeniem Chrystusa Pana, piérwszy z Greków, ilé nám jest wiadomo, gułt do nauk Matematycznych wzniecił, i rozszerzył. Tym końcem przeniósł się on do Egiptu, aby był z przewodnictwem tamtejszych Xięży, skarb nauk wszystkich pod swoim kluczem trzymających pożytkował: i tylé tam w krótkim czasie postąpił, że samych nawet przeszedł Nauczycielów. Wymiær Piramid przez niego uczyniony, z cienia, który rzucały, zadziwił Króla Amazyfa. To działanie, które dziś здаie nám się tak proste, okazywało w owym czasie wielki dowcip wynalázczy. Umiął on niedostępných przedmiotów wyznaczać odległości, lubo nie wiémy czyli iému winniśmy tén wynalazek. Nie doszło do nás żadné dzieło tego dawného Jeometry; wiele mu iednak nowo odkrytych wiadomości przypisują. Między innými jest i ta o nim powieść, że gdy doszedł włásności kąta w półkole, takiém to zadziwieniem i radością go napelniło, że na znak wdzięczności ofiarę za tén dar Muzóm uczynił.

Nie jest tu mieyscé mówić o licznych THALESIA wiadomościach, w innych częściach Matematyki, a osobliwie w Astronomii.

Był on fundatorem sekty, nazwanéy *Joniską*; i miał wielu w niéy uczniów, których tu imiona opuszczamy, zwiászczá że prace ich w Matematyce teorycznéj bardzo mało nám są wiadomé.

Nie możemy atoli zamilczyć o PITAGORESIE, urodzonym około 540 roku przed Chrystusem Panem, o uczniu THALESIA náyślawniéjszym z obfzérnych w Astronomii, Jeometrii, Muzyce, Metafizyce, i innych głębszych naukach wiadomości. Idąc on za radą Nauczyciela swého, udał się także do Egiptu, a stamtąd do Indyi, do tamtejszych Brachmanów, od których sławné o przenoszeniu się dusz z ciała do ciała (*Metempsychosis*) zdanie przejął, i potem utrzymywał.



Wiele kraiów zwiedziwszy, ośiadł we Włoszech, gdzie założył szkołę nazwaną *Pytagorycką*, którą znaczną liczbę sławnych Matematyków wydała.

Odkrytą i dowiedzioną pierwszy raz przez Pitagoreśa równość kwadratu przeciwprostokątnej z summą kwadratów ramion kąta prostego, dosyćby była do uczynienia imienia jego wiekopomnem. Przyganiała mu jednak, i ucznióm jego, że częstokroć w Matematyce i w Fizyce szli za wykwintnemi a nawet i dziwaczniemi wyobrażeniami, które sobie w układzie świata poczynili. Nie wchodząc w pobudki ich szperań przyznać wszelako należy, iż wiele rzeczy bardzo ważnych stało odkryto. Naukę brył foremnych przez nich podaną, sprawiedliwie dziś poczytuia za rzecz samę tylko ciekawości dogadzaiać; i całe się nie ściągaiać do układu świata. Jak wiele atomów mamy wiadomości geometrycznych i Arytmetycznych, do których ta nauka zagłębiona, tak iak się zdaie, iż była przez Pitagoreyczyków, otwierając drogę? Takąż w szczególności była i nauka o ilościach niespółmiernych, które sobie za cel godny uśilnych szperań wystawili. Jakoż doprowadziła ich do zagadnień tego gatunku, któreśmy nazwali zagadnieniami diiofantycznymi, a w których do tego się zmięrzają, aby uczynić spółmiernymi ilości te, które uważane ogólnie, wystawiają nam się pod kształtem ilości niespółmiernych. Takie naprzykład jest wyrażenie spółmiernie trzech boków trójkąta prostokątnego.

EMPEDOCLES, FILOLAUS, ARCHITAS, TIMEUSZ, i LEUCIPPUS, byli znakomitszymi PITAGORESA uczniami: dzieła ich do nas nie doszły, po wiekszej zaś części ściągały się do Matematyki praktycznej, a w szczególności do Astronomii. Dokładność i głębokość wielu ich wyobrażeń względem téj ostatniej nauki dowodzą dostatecznie, iak obfzérne mieli wiadomości i w Matematyce teorycznej.

Toż twierdzić można i o dziełach DEMOKRYTA, który, iako zaświadcza *Poema* LUKRECYUSZA o przyrodzeniu rzeczy (de natura rerum) zdrowo bardzo i czyśto sądził o wielu ważnych w Fizyce materyach.

HIPPOKRATES z Chio, ułożył xiazkę początkową Geometrii; nie znany teraz składiną, iak tylko z *Xięzyczków*, które się od imienia jego nazywają *Lunulae Hippocratis*.

Założenie szkoły Platoniskiej, jest znakomitą Epoką postępku w Matematyce. PLATO, uczeń Sokratesa, czuł więcę nad swego nauczyciela wartość, i powaby téj nauki. Zwiedziwszy Egipt, i udawszy się do Włoch, dla nabrania światła większego od sławniejszych Pitagoreyczyków; powró-



cil około roku 370 przed Chrystusem Panem do Aten oyczyzny swoiëy, gdzie założył sławną szkołę, zaſzczyconą imieniem jego. Jeometrya była zaſadą jego nauk. Nad bramą wchod do ſzkoły czyniącą, wyrity czytać ſię dawał napis, wyłączaający od ſpoleczeñstwa nauk jego tych wſzyſtkich, którymby początki Jeometryczne nie znané ieſzcze były.

PLATONOWI winniſmy część Jeometryi nazwana *Rozbióróm ddownym* (*Analyſis antiqua*).

Lubo mało nadto używana temi czasy, przeczyć atoli nie można, iż znacznie i ſzczęśliwie pomogła do wydoſkonalenia Jeometryi. Rozbiór takowy zawił na tém, aby rozwiązać zagadnienie Jeometryczne, przez Jeometryę teoryczną, z uważania ſamëy figury, i przez takie wykreślenie, do iakięgo prawie zawſze prowadzą ſposobem wybornieyſzym rozumowania proſto do tego zmierzaiące, niżeli rachunek.

Drugim wynalazkiem ieżeli nie PLATONA, tedy uczniów jego, ſą *Przecięcia oſtokręgowé* (*Sectiones conicæ*), i ich właſności. Przyſtôfowali ie oni do rozwiązywania różnych zagadnień, których albo przez linią proſtą, albo przez ſamo koło rozwiązać nie można. Takie ſą *np.* zagadnienia przecięcia iakięgokolwiek kąta na trzy równe części, wynaleziénia dwóch ſrzednich ciągło-proporcyonalnych, i dwumnożenia ſzeſcianu. Spôſób rozwiązywania tych zagadnień podany od MENECHMA, i DYNOSTRATESA, doſzedł do naſzëy wiadomości.

Trzecim wynalazkiem ſciſły związek maiącym, z kaſdym ze dwóch powyſszych, ſą *Mieyſca Jeometryczne*, których przykłady mieliſmy podane w początkowëy Jeometryi, a których obſzérnieyſze wyluſzczénie znaleźć będzie można, w dziele od nas zamyſloném, a ſciągaiącym ſię mianowicie do piérwſzego z tych trzech wſpomionych wynalazków.

ARYSTOTELES, uczeń PLATONA, a nauczyciel wielkiego Alexandra, i uſtanowiciel ſzkoły Perypatetyckiey, zaiomſzy nám ieſt daleko bardziëy z prac ſwoich w Filozofii, Fizyce, i Hiftoryi naturalnéy, niżeli w Matematyce.

Roftérki i zamięszania zaſzły po ſmierci Alexandra wielkiego, nie mało zatamowały poſtepek dalſzy nauk.

Założénie *Szkoły Alexandryſkiey* pod panowaniem Ptolomeuſzów, czyni nową Epokę, w którëy nauki życie odzyskały.

Miedzy innymi Matematykami, których względy od Ptolomeuſzów uczonym okazywane pociagnęły do Egiptu, wlauił ſię mianowicie EUKLIDES, oſiadłſzy tam około roku 300 przed Chrystusem Panem. Oyczyzna jego,  
i ſzcze-



i szczególniejście życia okoliczności są nam niewiadome. Początki Jeometryi przez niego napisane stały się iakoby księgą świętą dla wszystkich Matematyków. Zgromadził on tam w związku przedziwnym náywážnieysze podania początkowéy Jeometryi na ów czas znane. Sześć piérwzych iego xiążek, prócz tych iedenastá i dwunastá, powinny być koniecznie czytane, i zrozumiane od tych, którzy tylko chcą pożytkować z dzieł Fizycznych, i wyższéy Matematyki; tak dla wyborného porządku i związku nieprzerwaného podań iednych z drugimi, iako téż i dla tego, że wszyscy prawie Matematycy odsyłaia do księgi EUKLIDESA, gdzie tylko zachodzi materya, którą on się zatrudniał, albo gdzie poprzedzaiącą wiadomość iego dzieła potrzebna jest do zrozumienia tego, czego autor chce nauczyć.

Dzieło to EUKLIDESA było roztrząsane, wyłuszczone, i przekształcone od wielu Matematyków. Náylepsze iego wydania są té, które náywięcéy zbliżaią się do oryginału Greckiego. Takim jest BERMANNA po łacinie, i ROBERTA SIMPSONA po Angielsku, które po Francuzku przełożył P. CASTILLON.

Drugie dzieło EUKLIDESA mniéy znane od piérwzego, a ściągające się do Rozbioru dawného, do którego téż za wstęp służyć powinno, má tytuł. *Dané*, (ilości) (*Data*). Spodziewamy się mieć sposobność obszernie o nim mówienia w dziele naszym o téy materyi. Inni filozofowie szkoły Alexandryjskiej szczególniej się Astronomiá zatrudniali.

ARCHIMEDES, urodzony w Syrakuzie około roku 287 przed Chr: Panem, náywięcéy ze wszystkich starożytnych Matematyków podochodził rzeczy náywážnieyszych, i naytrudnieyszych. Jemu winniśmy wiadomość sfunktu powierzchni, i bryłowatości kuli do powierzchni, i bryłowatości walca na niéy opisaného. Wynalázek ten tak mu był szacowny i miły, że chciał go mieć wyrytym na grobie swoim. On piérwszy wyznaczył sfunek okręgu koła, do iego średnicy, sposobem całé dostatecznym do wszystkich przytósowań w kunsztach, i potrzebach życia. Do wyznaczenia tego użył wielokątów foremnych o 96 bokach, i w następnych piérwiástków kwadratowych wyciąganiach, potrzebnych do zamiérzonego przybliżenia, a zawisłych iednych od drugich, postąpił sobie z zręcznością pełną takiéy przezorności, że omyłki nawet nieuchronné w takowych następnych wyciąganiach, zamiast co miały osłabiać iego rachunek, ieszcze mu pomagały. Z tego wynalazku mógł przez przybliżenie porównywać koło i iego części, z miejscami przez proste linie zawartemi, powierzchnie, i bryłowatości ostrokregów, walców, kul, i ich części, z powierzchniami płaskimi prostokreślnemi, i bryłami zakończonemi przez powierzchnie płaskie. Odkrył on wiele ieszcze innych rzeczy



nawet w Matematyce teorycznej, które jednak nie wchodzą w układ tych początków. Wynaleziénie przez niego dokładnej kwadratury *Paraboly* albo *Równorzutni*, pierwszy wyśtawia przykład krzywéj linii mogącéj się zupełnie kwadrować, czyli porównać z powierzchnią prostokreślną.

Dzieła dawnych Matematyków, a w szczególności ARCHIMEDESA, różnią się mianowicie od nowszych, w téj ściśłości postępowania, której się zawsze trzymali w swoich dowodzeniach. W Części II. Jeometrii §. 104 i nast. staraliśmy się dać dokładné wyobrażenie ich *sposobu czérpania*, którego, oprócz innych przystosowań, używali szczególnie do zamiany porównania miéysc krzywokreślnych, i powierzchni krzywych, na porównanie miéysc prostokreślnych; i do porównania brył zakończonych powierzchniami krzywemi, tak z sobą, iako téż i z bryłami zakończonemi przez powierzchnie płaskie. Sposób ten mógłby być sprawiedliwie uważanym, iak nasiénie wynalazków w nowych rachunkach, które wślawiły teraźniejszy Matematyków.

Zamiar nasz nie pozwala nam mówić tu, czego doszedł ARCHIMEDES w częściach wyższej Matematyki, i w częściach Fizyko-Matematycznych, Mechanice. Katoptryce, i Hidraulice, które pierwszy zaszczerpił. Obrona Syrakuzu, której przez samo tylko podeyscie Rzymianie dostać mogli, wielkość i wytworność dowcipu ARCHIMEDESA okazuje. Najlepsze wydanie dzieł jego jest to, którym się zatrudnił Dóktór BARROU.

APOLLONIUS z Pergu w Pamfilii, urodzony prawie w półtrzecia wieku przed Chrystusém Paném; nazwany był *wielkim Jeometra*, z przyczyny zapewne wielu bardzo w Matematyce wiadomości, które posiadał; bo co się tyczy dowcipu, w tym bez wątpienia ARCHIMEDES przeszedł wszystkich dawnych.

Wślawił się szczególnie APOLLONIUSZ dziełem o Przecięciach Óstrokręgowych. Które w swoim gatunku jest tém, czém dzieło EUKLIDESA jest względem Matematyki początków.

Inne APOLLONIUSZA dzieła zawieraiące początkowe Matematyki Części w szacunku są, osobliwie u tych, którzy się przywiązali do Rozbioru Jeometrycznego dawnych.

Pierwsze z tych dzieł, o *Przecięciu myślném*, (De Sectione Rationis) doszło nas w ięzyku Arabskim. P. HALLEY, ieden z celniejszych Matematyków tego wieku, dał nam poznać to Dzieło w wyborném onego wydaniu po łacinie, roku 1708. Zagadnienie nayogólniejsze, które się tam rozwiązane znáyduje, jest następujące: *Maiąc dané z położenia dwie linie proste, i dwa punkta, (po iednym na każdéj z tych linii) pociągnąć przez trzeci punkt dany linią trzecią, któraby od dwóch pierwszych odcięła części rachować się maiące od punktów danych, takie,*  
*któ-*



któreby były w stosunku danym. Wielka odmienność, która byź może w położeniach trzech punktów danych, czyni też wielką rozmaitość przypadków, przez które to Dzieło służy bardzo do ćwiczenia się w Rozbiorze.

Uważając wytknięte od PAPPUSA miejsca, w Xiedze pod tytułem *Zbiory Matematyczne*, (Collectiones Mathematicæ) pozbierali Matematycy terazniejsi, i na nowo nam prawie podali Dzieła APOLLONIUSZA.

Tenże sam co wyżej P. HALLEY, przywrócił nam Dzieło o *Przecięciu miejsca* (De Sectione Spatii).

Różni się to Dzieło w tém od pierwszego, że zamiast stosunku części odciętych przez linią szukaną, kładzie się ich prostokąt.

W Dziele o *Przecięciu wyznaczoném* (De Sectione determinata) znajduje się rozwiązanie náyogólniejszego zagadnienia następującego: *Mając danę cztery punkta na iednej linii, znaleźć punkt piąty na téjże samej linii, taki, aby Prostokąt odległości tego punktu, od dwóch punktów danych, był do Prostokąta odległości tegoż punktu od dwóch innych danych, w danym stosunku.* Dzieło to APOLLONIUSZA było naprzód ułożone przez SNELIUSZA Matematyka Hollenderskiego, ale sposobem od Jeometrycznego bardzo oddalonym. Dało się potém widzieć wraz z innemi wybornemi rozbiorem Matematycznego wzorami w Dziełach pogrobowych (posthuma) Roberta Symfona (\*)

Tenże sam Matematyk powrócił do swojej całości inné jeszcze Apolloniusza Dzieła pod tytułem: *Miejsca płaskie* (Loca plana) tak w rozbiore Jeometrycznym potrzebne, iak EUKLIDESA *Dané* (ilości). To Dzieło, które w swoim czasie, i miejscu obszerniey i dokładniey poznać dąży, zawiera wiele własności miejscowych linii prostéy, i koła. Zebrał je także, i ułożył FERMAT i SCHOTTEN, ale w dokładności uchybili.

W Piątym Dziele o *Dotknięciach* (de Tactionibus) náytrudniejszy jest Zagadnienie *wykreślenia koła któreby się trzech innych dotykało*; a w ogólności Dzieło to zawiera rozwiązanie dziełaciąg Zagadnień, w które wchodzi punkta, liniie, i koła, wyznaczające wielkość i położenie takiego koła; któreby się ich dotykało. VIETE Matematyk, Francuz, żyjący w szesnastym wieku wydał na nowo to Dzieło pod imieniem Apoloniusza Francuzkiego; wraz z swoim trudniejszym jeszcze od pierwszego, gdzie zamiast linii prostych, i kół,

kia-

(\*) Winniśmy wyborné Dzieł pogrobowych tegoż wielkiego Matematyka wydanie, staraniu i wspaniałości LORDA STANHOPE, iednego z náyglębszych Matematyków tego wieku. Przyznać należy, iż w Anglii Jeometrya dawnych znalazła swoje schronienie, a ten z wielu miar zacny Pan, nie mało się z strony swojej przyłożył do iey rozszerzenia.



kładzie płaszczyzny, i kule którychby dotykała się kula szukaną. Dzieła tego Matematyka są bardzo rzadkie, i trudno ich dostać. LAWSON Angielczyk, dobrze biegły w Rozbiorze dawnych, wydaniem wyborném obu dwóch tych dzieł w oyczystym swoim ięzyku, łatwieyszemi ié do nabycia uczynił.

Dzieło naostatek APOLLONIUSZA o *Pochyłościach* (De inclinationibus) zawiera w sobie między innemi, ogólne Zagadnienie, i do wielu bardzo szczególnych przypadków, mogące się przystośować, a to jest takowe: *Niech będą dwa koła dane z położenia, i niech środki ich łączą się linią: przez punkt gdzie ta linia spotyka okrąg jednego z kół, trzeba poprowadzić taką linią, której część zawartą między okręgami tych dwóch kół, byłaby wielkości danej.* MARYN GETHALDI Ragusańczyk po części pozbierał to dzieło; dopełnił go ANDERSON, ale sposobem całé Algiebraicznym. HORSLEY Sekretarz Towarzystwa uczonych Londyńskiego, zatrudnił się takim iego wydaniem któremu nic nie brakuie.

TEODOZYUSZ z Trypolu znany jest mianowicie z Dzieła swego, o ilościach *Kulistych* (De sphaericis) które lubo szczególniey ściągają się do Astronomii, nauki celnieyszey tego Matematyka, átoi iednak służyć może i do Jeometryi początkowey. Wydanie tego dzieła przez Doktora BARROW jest naylepsze.

Matematyka równie jak i inne nauki i umiejętności, iednakowego w zaniedbaniu ich doznały losu przez piętnaście, lub szesnaście wieków *Czajności* (aera) Chrześciańskiego. Długi ten przeciąg wieków ciemnych gdzie nie gdzie zabłysnął światłém dowcipu, którego iednak ani liczba, ani obszerność nie odpowiadała całé tak wielkiey czasu rozległości.

MENELAUS w drugim wieku pisał o *Trygonometrii*. Dzieło iego o *Cięciwach* (de Chordis) które do nas nie doszło, zawierać w sobie miało ułożenie Tablic Trygonometrycznych. Zostawił ieszcze pamiątkę swoię w dziele o *Trojkątach kulistych*.

SEVERUS w trzecim, lub czwartym wieku podał o *Przecięciach Walsa* Dzieło swoje, w którym wiele znajduje się kawałków początkowych. HALLEY w wydaniu swoim przyłączył ié do przecięć Ołtrokręgowych APOLLONIUSZA.

Do tąd nic prawie nie mówiliśmy o wiadomościach Matematyków dawnych w rachunku. Jakoż bardzo mało poznań mamy ich w tey mierze szperañ i dochodzeń. Księgi iednak 7, 8, 9, 10, EUKLIDESA dowodzą między innemi postępu ich i w téy części Matematyki; a nawet i prące



ce Astronomiczne, któremi się zatrudniali, wyciągały koniecznie téy wiadomości. Nie jest nam wiadomo, czyli sposób od nich użyty podobny był do naszego Algiebraicznego, w przypadkach, gdzie zachodzące trudności zdają nam się przewyższać rachunek saméy Arýtmetyki.

DIOFANT z Alexandryi, który żył w czwartym wieku, miany jest za wynalazcę Algiebry, z przyczyny, iż Dzieło jego pod tytułem *Zadań Arýtmetycznych*, náy dawnieysze jest z tych wszystkich, które nas doszły w tey części Matematyki. Autor tego Dzieła rozwiązał wiele Zagadnień pierwszego stopnia, wyznaczonych, przywiązał się szczególniey, do tego gatunku Zagadnień, które noszą jego Imię, i w których założył sobie uczynić spółmiernemi té ilości, które się wystawiają pod kształtem ilości niespółmiernych. Z trzynastu Xiążek które w początku swoim zawierało jego Dzieło, nie zostało nam tylko sześć, w których DIOFANT coraż daléy posługuie kolejno z trudności iednéy do drugiéy; i z tey to miary szkoduiemy szczególniey z utraty reszty xiążek jego. Wielu Autorów późniejszyh iak np. FERMAT, VIETA, BACHET, FRENICLE, BILLI, PRESTET, rozszerzyło coraż bardziéy Teoryą DIOFANTA w tym gatunku Zagadnień; drugi iednak Tom Algiebry EULERA stanie teraz za wszystkie tamté Dzieła.

Dzieło PAPPUSA z Alexandryi pod tytułem *Zbiorów Matematycznych*, (Collectiones Mathematicae) ma swój szacunek z Historyi Matematycznéy, i wiele nam pomogło do poznania sposobu postępowania dawnych w ich szpéraniach i do zności w dochodzeniach ich Xiąg; których inaczéy i tytuły nawet nie byłyby nam wiadomé. Słychać iż teraz w Anglii pracują około tego Dzieła wydania poprawnieyszego od tych wszystkich które go poprzedziły.

Po wzięciu Alexandryi w Roku 641, i zburzeniu szacownéy i niezmiernéy Biblioteki, która znakomitą była ozdobą tego Miasta, już żadnego więcéy nie znajdujemy Matematyka, którego prace mogłyby bydź z pracami dawnieyszych porównané. Arabowie ćwiczyli się w Matematyce osobliwie *mieszanéy* (Mathesis mixta.) Tłumaczenia przez różnych Autorów Greckich, dało ich szczególniey poznać terażnieyszym Matematykom; i ułatwiło im tę naukę. Arabom także winniśmy sprostowanie Rachunków Trygonometrii płaskiey, i kulistej; które za czasów MENELAUSA, i PTOLOMEUSA były bardzo rozwickłe. Użycie wstaw łuków, zamiast ich Cieńciw wiele pomogło do tego sprostowania. Im przypisują i prostotę znaków naszych liczebnych, iako téż i sztukę w ich układaniu, i mianowaniu.



Podobieństwo same słowa Algiebrzy, do nazwiska Matematyka GEBER dało powód do poczytania go za Wynalazcę téj nauki.

Upadek Państwa Greckiego, i wzięcie Stambułu, wśród piętnastego wieku, jest początkiem odnowienia Nauk na Zachodzie. Wsparcie kt. w tam Królowie i Xiążęta, osobliwie we Włoszech, dawali uczonym, pociągalo ich do opuszczenia oyczyzny uciśnionej, i do zaszczerpienia w tamtych krajach Nauk prawie nie znanych. Tłumaczono naprzód Autorów dawnych a nie zadługo potem, porzuciwszy niewolnicze naśladowania, wla nego rozumu siłami pracować zaczęto. Drukarstwo na początku szesnastego wieku wszędzie już prawie było używane, i wiele bez wątpienia pomogło do roznieśienia światła. W tym właśnie wieku widzieć się dały pierwsze wydania Dzieł dawnych Matematyków: EUKLIDESA, ARCHIMEDESA, APOLONIUSZA, TEODOZYUSZA, i innych. COMMANDINUS między innymi, nie miał dosyć na samém zebraniu tego co dawniejsi przed nim pisali; ale licznymi a dobrze przystosowaniami przypisami, okazał obszerność wiadomości swoich w Matematyce. TARTALEA zaszczycił Imię swoje przez użyteczne i dowcipne w Algiebrze wynalazki. a MAUROLICUS wiele w przecięciach Ostrokręgowych podochodził.

VIETE pracował we wszystkich częściach Matematyki teorycznej. Wyżej mówiliśmy o przywróconym nam przez niego Dziele Apoloniusza o *Dotknięciach*. Pierwszy on pociągnął przybliżenie rachunku okręgu koła, aż do 10 dziesiątych; wprowadził ogólne znaki zamiast szczególnych; których aż do czasów jego używano, a tak dał nowy kształt Algiebrze, i użyteczniejszą ją uczynił. Można go mieć sprawiedliwie za pierwszego Zaszczerpiela Trygonometrii *Rozbiorowej*. (Trigonometria Analytica) Wiele on bardzo poodkrywał w rozwiązywaniu równań wyższych, i ustanowił pewną drogę, która prowadzi do dośięcia wielkiej wagi Twierdzenia NEWTONA o *Mnogościach ilor i dwuczłciowey* (De potentiis binomii.) Umarł w Paryżu R 1603. SCHOTTEN wydał R. 1645. wszystkie Dzieła jego, które tylko mógł zebrać.

METIUS i LUDOLF VAN CEULEN Hollender, znani są, mianowicie z prac swoich około przybliżenia rachunku ściągającego się do okręgu koła. Pierwszy z nich znalazł łosunek średnicy koła do jego okręgu bardzo do do-  
kła-

(\*) Algiebra ŁUKASZA DE BURGO pierwszą z druku wyszła naprzód roku 1494, a potem 1523. Nie zaszedł w niej Autor dalej jak do równań drugiego stopnia. SCIPION FERREO, CARDAN, TARTALEA, FERRARI, BOMABETTI, dotknęli kolejno, i rozciągnęli rzecz o Równaniach trzeciego i czwartego stopnia.



kładnego przybliżony, oraz proſty, iak 113 do 355. Drugi przybliżenie ſofunku tego pociągnął aż do 35 znaków dzieſiätnych.

NONIUS Jeometra Portugalſki wſławił ſię wielą w Matematyce wynalązkami. Zamiar nasz, nie pozwala nam przytoczyć, tu, iak tylko ſam wynalazienie podziału imieniem iego zaſzczyconego, który tak użytecznym ſtał ſię w Jeometrii praktyczney, i Aſtronomii.

BYRGE, który *obſerwacyami* i robieniem Matematycznych narzędzi ba- wił ſię przy LANDGRAFIE HESSKIM, miany ieſt za piérwſzego wynalazcę Lo- garytmów: nic jednak w téy mierze nie wydał. Jemu takżę przypisują użyteczny wynalazek, *Cerkła proporcjonalnego*.

Pomiędzy wielą Matematykami wieku ſzeſnaſtego, bardziéy z wielości prac ſwoich, niż z wynalązków nowych ſławnémi, CLAVIUS ſzczególniey ſłynął i obſzérnémi ſwémi w Matematyce wiadomościami zadziwiał.

W wieku oſtatnim naywiékszy i nayokázalſzy wzroſt wzięły Mate- matyczne nauki. Tu naywiécey nieznanych dawniey w Matematyce prawd odkryto, i nayſzczęſliwiey ich przyſtoſowania do wſzyſtkich Fyzyko-Mate- matycznych części poczyniono. Wykład wielkich tych rozumu ludzkiego wy- ſileń w zamiar nasz nie wchodzi, ktorego celém ſamé tylko ſą części Matema- tyki początkowé.

Piérwſzém odkryciem w Matematyce teoryczney ſą Logarytmy. Na- miéniliſmy wyżéy, iż BYRGE naprzód myſlą na nie napadł, i pracować kolo- nich przedſięwziął, czego ieſt jednak w téy mierze doſzedł, tego ani my nie wié- my, ani nawet NEPER Baron Szkodzki, ktorému przeto wynalazek ten ſpra- wiedliwie zdać ſię należyć, o tém nigdy nie ſłyſzał. Właſność i używanie tako- wego liczb gatunku, opisałiſmy już na ſwoim mieyſcu doſtatecznie. Zostać nam ſama tylko część Hiſtoryczną. Piérwſzy kſztałt, który dał Táblicom ſwoim Logarytmowym NEPER mniey był wygodny od kſztałtu Táblie na- ſzych zwyczajnych; a to w tém, że Logarytmy liczby 10, i iéy różnych mnogości nie były złożone z ſaméy tylko *Cechy* (*Characteristica*;) ale z *Cechy*, i liczb ułomkowych, (nazwanych w tym razie *Mantissa*). Ta przywara znaydowała ſię w piérwſzém wydaniu iego wynalazku roku 1614; w dziele pod tytułem: *Triflori Logarithmorum Canonis descriptio*. Poſtrzegł ſam, zaráz niewygodę, która ſtąd wynikała, w rachunkach oſobliwie Trygonometry- cznych, i dał potém nowy kſztałt Táblicom ſwoim, ktorých już powtórnie wydadz nie mógł, dla ſmierci, która go załkoczyła roku 1618. Syn iego wy-



drukował tę odmianę, w dziele pod tytułem *Appendix de Logarithmorum præstantiori via*. (\*)

NEPER powierzył myśli swoich HENRYKOWI BRYGGS, Nauczycielowi Oxfordskiemu; który wielką część tej roboty wykonał. Rachował on aż do 14 znaków Logarytmy liczb zwyczajnych, zaczawszy od 1, do 20000; i znowu od 90000, aż do 100000 i wydał je pod tytułem: *Arithmetica Logarithmica*. Gdy już daleko dosyć zaszedł był i w rachunku Logarytmów ilości Trygonometrycznych, śmierć go tym czasem zabrała. HENRYK GELLIBRAND dokonał i wydał to ostatnie Dzieło roku 1630; pod tytułem: *Trigonometria Britannica*. ADRIAN VLACQ Hollender dopełnił, czego mu jeszcze do większej wygody brakowało. Dał Táblicóm kształt mniejszy od Angielskiego arkuszowego, i wyrachował Logarytmy ilości Trygonometrycznych od 10 do 10 minut drugich. Mámy tych Táblic kilka wydań. Táblice GARDYNERA, SCHEWREINA, DAPARCUSZA, RIVARDA, i SCHULTZA, dla dokładności w drukowaniu, i porządku w ułożeniu ich szczególniejszej warte są zalety.

Wynalázki teraźniejszych Matematyków w rachunkach wyższych, podają sposoby, skracające i ułatwiające tego gatunku rachunki; o których dotąd mówiliśmy.

KEPLER wlałwił szczególnie imię swoje przez szczęśliwe w Astronomii odkrycia. Liczne jego w tym rodzaju prace, dosyćby były do przeświadczenia nas o obfzernych jego wiadomościach w Matematyce teorycznej. Jego *Stereometria Doliorum* zawiera w sobie takie zamiary, któreby mogły być tym co po nim nastąpili, dopomódz do nowych wynalazków. Założył on sobie, względem Brył utworzonych z obrotu różnych części Koła, i Przecięć Ostrokągowych, wielorakié Zagadnienia z których niektóre rozwiązał, a innych wiele przechodziło granice szczyptego jeszcze światła w onym wieku. Té Zagadnienia następnym po nim Jeometrom, służyły za bodziec do równania sobie dróg nowych. Dóyscie GULDINA więcej do Mechaniki, iak do Matematyki teorycznej należące, (które jednak podaje liczne przytłosowania) jest podobno skutkiem w tym razie zabranych z KEPLERA wiadomości. *Sposób niepodzielnych* (ilości) *Methodus indivisibilium* znaleziony przez CAVALLEREGO, o którym mieliśmy mieyscé mówienia w Jeometrii, był narzędziem wielu

(\*) Imię NEPERA znané jest jeszcze i z innych względów. Bo że na samych tylko początkowych częściach przestaniemy, wspomniemy przynajmniej, iż on wiele się przyłożył do sprostowania rachunków Trygonometrii kulistej. Jest on także autorem Ciekawości Arytmetycznej nazwanéj *łaskami Nepera* (les Batons de Neper). Jest to gatunek Machiny Arytmetycznej, ułatwiającej niektóre rachunki.



wielu nowych tworów w ręku wynalazcy, a początkiem większój jeszcze ich liczby dla tych, którzy po nim nastąpili.

Insze odkrycia, które FERMAT, ROBERVAL, PASCAL, WREN, WALLIS i GRZEGORZ od S. Wincentego, poczynili, w liniach krzywych wyższych niż początkowe, są nieiako stopniami, przez które rozum ludzki postępował aż do owych przedziwnych wynalazków NEWTONA i LEIBNITZA, na których sławem wspomnieniu Imion wielkich przestać tu musimy.

HUYGHENS rodem z Hollandyi, urodzony R. 1629. szczególniej Matematykom dał się poznać przez nowe w Mechanice, i Astronomii odkrycia, i przez pisma swoje do Fizyki ściągające się. Ta nawet ostatnia praca jego, wielkiego wydaie Matematyka. W ogólności zaś mówiąc, wiele on się przyłożył do postępu w Matematycznych naukach, w tych osobliwie częściach, które przechodzą granice początków, lubo i tych nawet nie zaniedbał. Idąc za przewodnictwem Dzieła jego, o *Wynalezionéy wielkości koła*, pokazaliśmy w Jeometryi Części I, dokładność przybliżoną stosunków náywygodniejszych Okręgu koła, do jego średnicy. Dzieła prawie wszystkie tego wielkiego Męża, pisane są z tą w dowodzeniach dokładnością i ścisłością, które szczególniej zalecają Dzieła dawnych Matematyków.

VIVIANI sławnego Galileusza uczeń nad pismami dawnych Matematyków, a osobliwie APOLONIUSZA bardzo wiele pracował. Podał on wszystkim uczonym ciekawe zagadnienie ściągające się do dokładnego kwadrowania części powierzchni kulistej, które pierwsi tegoż wieku Matematycy LEIBNITZ, JAKOB BERNOULLI, MARGRABIA de l'HOPITAL, WALLIS, i GREGORY rozwiązać przedsięwzięli. Náyprościeysze iednak z pomiędzy wszystkich jest samego VIVIANIEGO takowe rozwiązanie: *Przez środek podstawy Półkuli, niech przechodzi płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny téj podstawy; na téj płaszczyźnie niech będą narysowane dwa półkola mające za średnice, Promienie wspólne téj płaszczyźnie podstawy; a na tych dwóch półkolach wystawmy sobie iakoby stojące dwa walce proste, któreby przenikały półkulę i z iedney, i z drugiey strony; odetną one od powierzchni półkuli cztery sztuki takie, że reszta powierzchni pozostała równać się będzie podwoynému kwadratowi promienia półkuli.* GUIDO-GRANDI, który w roku 1701 przydał dowodzenia dokładne do wielu VIVIANIEGO wynalazków, o których on tylko namienił, przytacza i insze niektóre ciekawości Jeometryczne, tegoż co wyżej gatunku; np: *Gdy na podstawie Ostrokręgu prostego, narysowany będzie iakikolwiek Wielokąt, i znówu na tymże Wielokącie, iak na podstawie będzie Ostrográn prosty przechodzący przez Ostrokrąg, odetnie on od powierzchni Ostrokręgu z strony wierzchołka część taką, która cała może być kwadro-*



drowaną. Ale o takowych w Matematyce dochodzeniach, równie iak o niektórych częściach koła kwadrować się mogących, jednoż trzymać należy, iż to są ciekawości, z których nic daley ku użytkowi iakiemu wyciągnąć nie można.

KARTEZYUSZ, który więcej załżył sobie bydź znanym z prac Matematycznych, a niżeli z dowcipney swey Filozofii, ale dalekiew od natury, rozciągnął osobliwie ogólną teorią Równań wyższych, i głębszą Jeometrią, przez wprowadzenie rachunku literalnego w działania Jeometryczne. To wprowadzenie zdolnym go uczyniło do przebycia tych wszystkich trudności, którym dawni wydolać nie mogli. Znáydziemy podobno właściwsze gdzie indziey miejsce mówienia, o pożytkach, i nieprzyzwoitościach tego wprowadzenia: a w szczególności o iego potrzebie w częściach głębszych Matematyki. P. SLUZE w przytósowaniu Algiebrzy do Jeometrii wiele ważnych rzeczy powynádywał, ale te w zamiar nasz nie wchodzą.

Ze wszystkich dzieł początkowych w sposobie KARTEZYUSZA ułożonych, szczególniejszego wárta iest zalecenia *Arytmetyka powszechna* NEWTONA. Dostyc iest wspomnieć tego Autora, do wzbudzenia winnego mu szacunku i uszanowania. Mámy wyborne iey wydanie staraniem CASTILLONA, który iá nadto przypisami swemi przyozdobił. Przypisy te po wielkiej części ściągają się do rozwiązania Jeometrycznego Zagadnień podług sposobu dawnych, który lubo sobie wyfoce szacował NEWTON, nie użył go jednak w tem Dziele; ale dopiero, gdzie też przyzwoitsze znalazł mu miejsce, w Xięgach swoich nieporównanych pod tytułem: *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis*. P. HORSLEY, má wydać wszystkie razem Dzieła wielkiego tego, i pierwszego między Matematykami późniejszymi meża.

W Dziele P. GUINEE, *Algiebra przytósowana do Jeometrii*, żadaćby często można większey dokładności.

Bardzo wiele powychodziło Dzieł początkowych Matematycznych, przez terażniejszych Autorów napisanych, w których Młódz znać może nie małą pomoc do rozszerzenia swoich wiadomości; i do przyuczenia się uważać iedne przedmioty, pod różnemi względami. Niepodobną prawie, a razem i nieużyteczną rzecz byłaby wyliczyć ie wszystkie dokładnie. Wspomniemy jednak niektóre, nie chcąc wżelako poniżać tych, o których wzmianki uczynić nám nie przyidzie.

Jeometrią praktyczną P. LE CLERC, bardzo iest zdatná do wprawiania poczynających w działania ręczne, i do spoufalenia ich z przedmiotami Jeometrii.



CLAIRAUT, ieden z naygłębszych Matematyków tego wieku, raczył jednak zniżyć tę, i do początkowych Matematyki części. Początek w iego Jeometrii zamiarem, jest przyuczyć młodź do ściśłości Matematycznej, i do pokazania im postępu w wynalazkach. Algiebra iego początkową, byłaby ze wśzech miar dostateczną, gdyby jeszcze więcej przykład w zawierała. Niedostatkowi temu zaradzili w Xiegach swoich Algiebry, SAUNDERSON, SIMPSON, MAC-LAURIN i EULER. W Arytmetyce i Jeometrii CAMUSA, Dziełach z innych miar bardzo dobrych, brakuie większey zwiezłości.

DE LA CAILLE zamknął w niewielkiey dosyć Xiążce wszystko to, cokolwiek jest ważniejszego w Matematyce początkowey; sta zaś dokładnością to wykonał, kt rą właściwą jest i innym iego Dziełom. KARSTEN w Dziele swoim może mu być z tęy miary porównany.

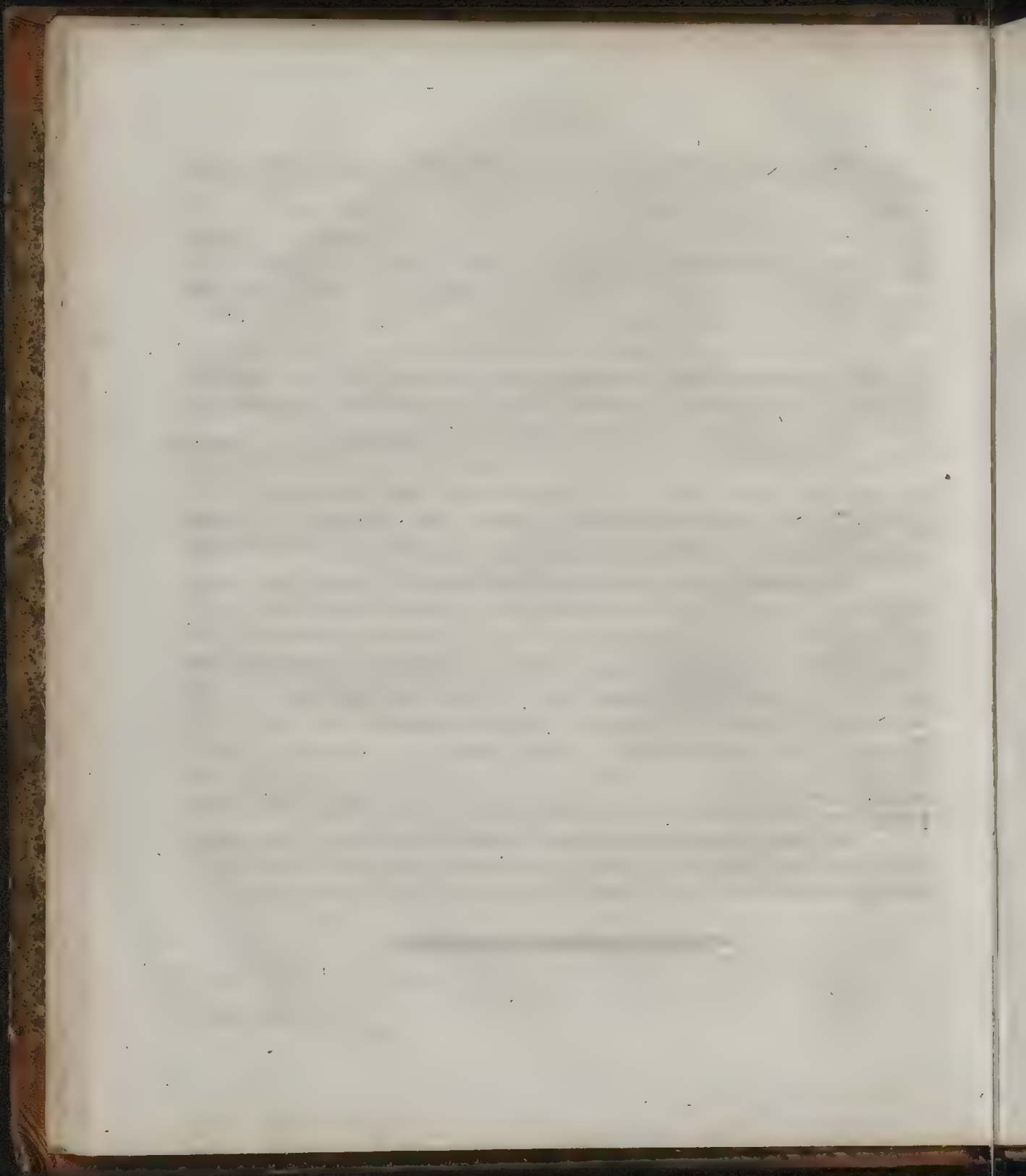
Zadają Matematykom Francuskim, iż oni mniej są troskliwi o ściśłość w dowodzeniach; a w szczególności, iż wiele sobie w tęy mierze pozwalają w podaniach, dających miejsce do wprowadzenia ilości niepodzielnych, nie wyłożywszy pierwey i niedowiodłszy prawości tego używania. W ciągu xiąg naszych Elementarnych wspomnieliśmy już o wybornym Dziele początkowym P. BERTRANDA Profesora Matematyki w Gienewie.

Uczniowie którzy zechcą nad granice początek w przestąpić, i poznać przystosowania Matematyki teoryczney, wielką do tego znaleźć mogą pomoc w Dziełach PP. DE LA CAILLE, MAUDUIT, BOSSUET, BEZOUT, WOLF, KAESTNER, i SEGNER, i innych podobnych. *Przecięcia Ostrokątowe* podane przez SIMSONA, HAMILTONA, GUIDO GRANDI, są to wyborne Dzieła napisane sposobem całę Jeometrycznym, dawnych. W *Przecięciach Ostrokągowych* Margrabi de l'Hopital, w Xiegach pod tytułem: *Institutions Arithmetiques* Panny AGNESI; *Introductio ad Analysim Infinitorum*, EULERA; *Introduction à l'Analyse des lignes Courbes*, CRAMERA, możemy czerpać naylepsze sposoby przystosowania rachunku do Linij krzywych. i te Dzieła służyć nam mogą do przeyscia od początków do części wyższych Matematyki teoryczney.

Nastatek *Pamiętniki* (Mémoires) Akademii Paryżkiey, Londyńskiey Petersburgskiey, Berlińskiej, i insze, wiele bardzo osobnych kawalków zawierają, ściągających się do Matematyki teoryczney, i przystosowaney.









# ALGIEBRA

## ROZDZIAŁ I.

*Zagadnienia, w które jedna tylko niewiadomą ilość wchodzi,  
i same ilości całkowite.*

I. **D**ziałania Arytmetyki, są około znaków wyrażających ilości same wiadome, końcem dochodzenia z nich ilości niewiadomych.

Pod działania Algiebrы podpadają bez braku tak wiadome, iako niewiadome ilości, z których pierwsze od drugich rozmaitemi się sposobami póty oddzielają, póki ważność drugich nie będzie oznaczoną przez pierwsze w wyrazach iak najprościej. Na tę jednę różnicę Algiebrы od Arytmetyki, względ mieć w początkach będziemy.

Uwagi w Arytmetyce uczynione, względem znaków z samego ludzi upodobania wybranych na wyrażenie naszych wyobrażeń, a w szczególności na wyrażenie wielkości, te, mówię, uwagi, jeżeli nie znieść zupełnie, tedy przynajmniej zmniejszyć powinny te trudności, które na pierwsze weyrznię nie mogłyby się komu ślawić przed oczy, z przyczyny różnicy dopiero wzmiankowanych.

2. Krótkość znaków używanych w Arytmetyce, na wyrażenie wielości rzeczy iakich, a zatem i łatwość wyślawienia sobie w myśli tychże rzeczy patrząc na te znaki, pokazuje nam użytek jeden z najznakomitszych w przybraniu tych skróconych znaków, na miejsce ilości, które się przez nie wyrażają. Z tegoż powodu wprowadzone są i znaki ukazujące ilości niewiadome. Gdyby pojęcie nasze nie było tak, iak jest, niedoskonałe; nie trzebaby nam tej pomocy. Stworzenia nie tak, iak my, ograniczone, patrzyłyby podobno razem na związek wiadomości danych w zadaniu, z odpowiedzią żadaną, bez szukania tych środków, przez które, dla słabości naszego pojęcia, przechodzić musimy.

3. Aby się tém widoczniej przeświadczyć, iż znaki na wyrażenie ilości niewiadomych bardziej daleko dla wygody, niż z potrzeby są wprowadzone; użyjemy w wielu przykładach dwoiakiego sposobu: z których w jednym zdawać się będzie, że nad samemi tylko wiadomymi ilościami, tak właśnie iak w Arytmetyce, rozumujemy, w drugi zaś wnidą znaki ilości nie-

wiadomych, i przez ogólne reguły (które na swoiém miejscu podamy) dochodzić będziemy z pewnością niezawodną celu zamierzonego. Pierwszy nazwiemy *spółobem postępowania Arytmetycznym*, albo *przez rozumowanie*, drugi *Algebraicznym*.

4. Tén dwoiaki postępowania sposób tym z większym będzie użytkiem, że uczących się Algiebrzy wprawi oraz w Loikę praktyczną. Większą część Uczniów, którzy w dalszém pożyciu ćwiczyć się w Matematyce nie będą, tén prawie iedyny zysk, ale zysk wielki, z nauki téy odniosą.

5. Nie trzeba iednak obiecywać sobie, aby zawsze porównanié tych dwóch sposobów uczynić można. Wielé, bardzo jest zadań tak zawikłanych, żebyśny ich przez samo rozumowanie rozwiązać nie potrafili, nie wezwawszy na pomoc narzędzi, i tych sposobów które nám Algiebra podae. Należy więc w zadaniach prościejszych nauczyć się używania tych narzędzi, i tych sposobów: aby wprawa w obchodzeniu się z niémi zmniejszyła nám trudność, gdy ich używać przyydzie w zadaniach zawilszych. A wszczególnosci w częściach niektórych Fizyko-Matematycznych, wielé bardzo zdarza się przypadków, gdzie użycie tych narzędzi i tych sposobów koniecznie jest potrzebne. I gdyby nawet, ośliwšie iakié mając przenikniénie, mogliśmy dóysdz przez samo rozumowanie do rozwiązania podobnych trudności, bardzo iednak często statoby się to sposobém daleko dłuższym, i mniéy ogólnym: w naukach zaś do praktyki przytósowanych wielé na tém zawisło, aby nie tylko dóysdz, ale dóysdz iak náyprostsza drogą celu zamierzonego.

*Zadanie I.* Z dwóch osób, które oznaczamy przez *A*, i *B*, pierwsza má dwa razy tylé ilé druga: má zaś pierwsza 12 złotych więcéy od drugiej: ilé má każda z tych osób w szczególnosci?

W tém zadaniu dwie są ilości niewiadomé: toiest majątek iednéy, i drugiéy osoby, dwie także ilości są dané, toiest różnica majątku pierwszéy osoby od drugiéy, i liczba oznaczająca, ilé razy majątek piétyzéy osoby, większy iest od majątku drugiéy. Każda z tych wiadomości szczególnie wzięta, nie prowadzi do pewnégo rozwiązania zadania: bo można znaleźć tylé ilości, ilé tylko zechcémy, które iednéy z tych wiadomości uczynią zadołyć: ale dwie tylko są takie ilości, które tak iedną, iak i drugą wiadomość zawartą w zadaniu wypełniaą. Wiadomości dané i prowadzące do znalezienia ilości, których szukamy, nazywają się *Warunkami* zadania (*Conditiones*). Przez samo zaś zadanie zapytani bywamy, iakié są ilości, czyniącé zadołyć tym Warunkom.

*Sposób I.*



*Sposób 1. rozwiązywania przez rozumowanie.* Ponieważ A, dwa razy ma tyle, ile B, więc Nadmiar (excessus), pierwszego majątku nad drugi, jest w samej rzeczy tym drugim majątkiem, a że ten nadmiar jest 12 złotych, więc drugi majątek, to jest, Osoby B, jest 12 złotych: a zatem majątek pierwszy Osoby A, która ma mieć dwa razy tyle, ile druga, będzie 24 zł: Jakoż te dwie liczby 24, i 12. wypełniają dwa warunki dané, to jest 24 zawiera w sobie dwa razy 12, a nadmiar 24 nad 12, jest 12.

*Sposób 2. Algebraiczny.* Można oznaczyć majątek osoby mniéj mającéj przez znak jakikolwiek. Powszechnie jednak oznaczają Matematycy, ilości niewiadome przez ostatnie abecadła litery, np:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Niech więc  $x$  znaczy majątek osoby B, to jest 12 złotych: będzie zatem majątek osoby A, dwa razy więkzsy, oznaczony przez  $x$  dwa razy więtsze, to jest przez  $2x$ .

A że majątek osoby A, przewyższa majątek osoby B, 12. złotemi, więc téż majątek osoby A, może być oznaczony przez  $x$ , powiększone 12 zł: to jest przez  $x+12$  (znak  $+$  wymawia się téż słowem *więtszy*).

Będzie tedy, mógł być oznaczony majątek osoby A, dwoma wyrażeniami, to jest przez  $2x$ , albo przez  $x+12$ .

Ponieważ te dwa wyrażenia jednę ilość znaczą, więc  $2x$ , będzie równe,  $x+12$ : ta zaś równość tak się oznacza,  $2x = x+12$ . Znak  $=$  czyta się tak, jak gdyby było napisane, *równa się*, albo *równé jest*.

Gdy dwie ilości są równe, a tak od jednéj, jak i od drugiey odejmiey ilość jednakową, reszty będą równe. Ponieważ tedy  $2x = x+12$ ; więc odjąwszy  $x$  z jednéj i z drugiey strony; reszty  $x$  i 12, będą równe, a zatem  $x = 12$ .

Aż  $x$  oznaczało majątek osoby B, więc majątek osoby B, jest 12, majątek zaś osoby A, dwa razy więkzsy, i przewyższający liczbą 12. majątek osoby B, będzie 24, które 24 i jest 2 razy więtsze od 12, i przewyższa je liczbą 12.

7. Przykład 2. A, ma trzy razy tyle, ile B, ma zaś więtszy 18 złotemi od B: ileż ma A, ile B?

*Przez rozumowanie.* Ponieważ A, trzy razy ma tyle, ile B, więc nadmiar majątku A, nad majątek B, będzie dwa razy ieszcze więkzsy od majątku B.

Ze zaś ten nadmiar jest 18 zł: więc majątek B, będzie połową 18, to jest 9 złotych. Majątek A, tak z téj miary, że trzy razy jest więkzsy od majątku B, iako i z téj, że przewyższa majątek B, 18 złotemi, będzie 27 złotych.

A 2

Przez

Przez Algiebrę. Maiątek B. . . . .  $x$ .

Maiątek A. . . . .  $3x$  albo  $x+18$ .

Więc  $3x = x+18$ ; odjąwszy  $x$  po obu stronach . . . . .  $2x = 18$ .  
Gdy ilości są równe, ich też połowy będą równe: więc podzieliwszy przez 2 z jednéj i z drugiey strony, będzie . . . . .

$$x = 9.$$

Maiątek tedy B . . . . . 9.

Maiątek . . . . . A . . . . . 27.

Té dwie liczby czynią zadosyć dwóm warunkóm położonym w zadaniu.

*Inszé przykłady.* A, má razy 4, 5, 6, 7 i t. d. tyle, ile B, różnica maiątków jest 60.

8. *Uwagi.* Gdy się załanowimy nad sposobém postępowania w szukaniu rozwiązania Zadanié poprzedzających; potrzeżéjny tam pięć różnych części.

W piérwszéj, dané są nazwiska ilościóm niewiadomym. Té nazwiska były poczęści wzięte z upodobania, po częsci nie. I tak maiątek osoby B, nazwaliśmy  $x$ , a mogliśmy go równie nazwać,  $y$ ,  $z$ , lub inaczej: ale wyrażenie drugiey ilości niewiadomey już wypadało z wyrażenia piérwszego, i z warunków zadania.

Oznaczylismy naprzód maiątek mnieyszy: bo z niego łatwo zaráz było oznaczyć maiątek więkzzy przez dodanie lub rozmnożenie. Gdybyśmy zaś naprzód nazwali maiątek więkzzy; tedy maiątek mnieyszy trebaby było oznaczyć przez odejmowanie lub dzielenie: łatwiey zaś iest dodadź i rozmnożyć, niż odjąć i podzielić.

Ta przeczorność w dawauiu naprzód nazwisk ilościóm mnieyszym, z których potém przez dodawanie lub mnożenie, wypadaia wyrażenia ilości więkzzych, nie tylko łatwieysze czyni i prosiłze oznaczenia ilości niewiadomych, ale nad to skracá dalsze działania. Trzeba często powtarzać tę uwagę zwłászczá w Zadaniach zawiłszych.

Tę część dochodzenia ilości niewiadomych nazwiemy *Mianowaniem* (Denominatio). Zawisła ona na tém, aby dadź nazwiska ilościóm niewiadomym.

W drugiey części pokázala się *Tosamość* (Identitas) dwóch wyrażen iednéj ilości. Tosamość ta nazywá się *Równaniem* (Aequatio).

Dwa wyrażenia oddzielone znakiem równości  $=$  nazywac się mogą *stronami równości*, (taká iedna strona nazywá się po łacinie *Membrum aequationis*);



tionis); a gdy té strony złożone są z wielu znaków, każdy z nich nazywamy się *wyrażeniem* (Terminus). Tę drugą część nazwiemy Warunkiem: bo ona wypada z iednego, lub więcey warunków, czyli wiadomości, które wchodzą w Zadanie.

W trzeciej części ułatwiliśmy w ten sposób Równanie, że znak ilości niewiadomey został sam, i wolny od innych ilości, które mu zawadzały. Reguła ogólna ośwobodzenia ilości niewiadomey od połączonych z nią ilości wiadomych, jest: użyć działania przeciwnego temu, przez które wnieśliśmy się ilości wiadomej do ilości niewiadomey. I tak w Równaniu:  $3x = x + 18$ : ponieważ na obu stronach Równości, znajdowało się  $x$ , odjęliśmy go od iednej i od drugiej strony, aby ilość niewiadoma po iednej tylko stronie została: wypadło stąd równanie  $2x = 18$ , w którym, że  $x$ , znak ilości niewiadomey, rozmnożony jest przez 2, uwolniliśmy go dzieląc pierwszą i drugą stronę Równania przez 2, stąd naosłatek wypadło Równanie:  $x = 9$ .

Tę trzecią część nazywać będziemy *Przerabianiem* (Reductio), które na tém zawisło, aby przez rozmaite działania przywieść do tego Równanie, żeby po iednej tylko stronie została ilość niewiadoma równająca się samym ilościom wiadomym.

To zdziaławszy, przysliśmy do *czwartej części*, którą nazwiemy *Rozwiązaniem*, (Solutio). Rozwiązanie zamyka w sobie odpowiedź na Zadanie, to jest zamyka wyrażenia ilości przedtem niewiadomych, w ilościach wiadomych.

Nakoniec w *piątej części* doświadczamy, czyli wyrażenia ilości szukanych znalezione w ilościach danych i wiadomych, zgadzają się z Warunkami Zadania, to jest, czyli Zagadnienie dobrze jest rozwiązane. To działanie nazywamy się *Sprządzeniem* (Verificatio) (\*).

9. *Przystosowanie tego porządku do Zadania iednego z powyższych.*

A, má cztery razy tyle, ile B: má zaś A, 60 złotych więcey niż B.

*Mianowanie.* Maiątek B . . . . .  $x$ .

Maiątek A . . . . .  $4x$  albo  $x + 60$ .

A 3

Waru-

(\*) Winniśmy ten porządek Jmć Panu LE SAGE Gienewczykowi policzonemu w wielu Towarzystwach uczonych. Zatrudniony on będąc rozmaitemi, a wielkiej wagi pracami około wyższych części Filozofii, nie miał sposobności podania do druku Pism swoich Elementarnych.

*Warunek*  $4x = x + 60$ .

*Przerabianie.* Odiawszy  $ix$  po obu stronach; będzie . . .

. . .  $3x = 60$ . Podzieliwszy przez 3. będzie . . .

. . .  $ix = 20$ .

*Rozwiązanie.*  $ix = 20$ . Maiątek B.

$4x = 80$ . Maiątek A.

$x + 60 = 80$ . Drugie wyrażenie maiątku A.

*Sprawdzenie.*  $80 = 80$ . Tu oczywiście widzieć się daie, że dwa wyrażenia maiątku A, są równe, a zatem zadanie jest rozwiązane.

10. Zadanie 2. Dwie osoby A, i B, mają razem 24 złote: ma zaś A, 2 razy tyle ile B: ileż ma A, ile B?

*Rozwiązanie Arytmetyczne.* Ponieważ A, dwa razy tyle ma ile B; więc summa obudwóch ich maiątek będzie maiątek B, razy trzy: że zaś ta summa jest 24 Zł: więc 24 jesto liczba zamykająca w sobie trzy razy maiątek B; a zatem maiątek B, będzie trzecią częścią złotych 24, to jest będzie Zł: 8. Przeto maiątek A, dwa razy większy, będzie 16 złotych. Summa 8, i 16 złotych, czyni 24 złote, które miały obiedwie razem osoby A, i B.

*Algebraiczne. Mianowanie.* Maiątek B . . .  $x$ .

Maiątek A . . .  $2x$ .

Summa maiątek  $3x$ .

A że ta summa czyni 24 złote, więc będzie,

*Warunek.*  $3x = 24$ .

*Przerabianie.* Podzielimy jedną i drugą stronę Równania przez 3, będzie  $ix = 8$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 8$ . Maiątek B.

$2x = 16$ . Maiątek A.

$3x = 24$ . Summa maiątek.

*Sprawdzenie.* Summa maiątek jest taką, jaką być powinna, to jest 24: maiątek też A, dwa razy jest większy od maiątku B.

*Insze przykłady.* A, ma 3, 4, 5, 6, i t. d. razy tyle ile B: summa ich maiątek, jest 36, 40, 48, 49, i t. d.

II. Zadanie 3.



11. Zadanie 3. W Zgromadzeniu ze 100 osób złożonem A, i B, sta-  
raią się o jeden urząd. A, otrzymując krótkami przewyższa B: ileż każda z tych  
dwóch osób A, i B, miała krótek?

*Arytmetycznie.* Gdyby tyle krótek dano na A, ile na B; tedyby tak  
osoba A, iak i B, miała po 50. krótek, (gdyż wszystkich krótek jest 100).  
Dla téż przyczyny jeżeli A, ma 1, 2, 3, i t. d. krótkami więcej, niż  
50; B, będzie miało 1, 2, 3, i t. d. krótkami mniej niż 50: a zatem  
osoba A, w tych razach będzie miała, 2, 4, 6, i t. d. więcej krótek,  
niż B.

Więc liczba krótek, którą ma A, więcej niż 50, B zaś mniej niż  
50, jest połową téj liczby, którą krótki na A, przewyższają krótki na B: a  
że A, ma więcej 10 krótkami niż B, więc A, ma 5 krótkami więcej niż 50,  
a B ma 5 krótkami mniej niż 50. Więc na A, dano krótek 55, na B, 45.  
Jakoż dodawszy 55, do 45. Summa będzie 100: a odjąwszy 45,  
od 55, Różnica będzie 10.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Krótki na B . . . . .  $x$   
Krótki na A . . . . .  $x+10$ .  
Summa krótek . . . . .  $2x+10$ .

*Warunek.*  $2x+10=100$ .

*Przerabianie.* Odiąwszy 10 po iednój i po drugiój stronie, będzie  
 $2x=90$ . Podzieliwszy przez 2 . . . . .  
 $x=45$ .

*Rozwiązanie.*  $x=45$ . Krótki na B.  
 $x+10=55$ . Krótki na A.

*Sprawdzenie.* Warunki są zachowane: bo i summa krótek jest 100,  
i A, ma więcej 10 krótkami, niż B.

*Inszé przykłady.* A, i B, mają razem . . . 144, 148, 157, 163, i t. d. Zł.  
A, ma więcej niż B, 36, 52, 63, 57, i t. d. Zł.

12. Zadanie 4. Osoba A, trzy razy tyle miała, ile B, zyskawszy  
nad to 12 złotych, ma czterój razy tyle, ile B: ileż ma A, ile B?

*Arytmetycznie.* Ponieważ osoba A, zyskawszy 12 złotych, ma 4  
razy tyle, ile B, a przed zyskiem miała tylko trzy razy tyle, ile B; więc  
zysk osoby A, równy jest majątkowi osoby B: a zatem majątek B, jest 12  
złotych.

złotych. Więc majątek A, przed zyskiem był 36, a po zysku 48 złotych, to jest 4 razy tak wielki, jak majątek B.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Majątek B . . . .  $x$ .

Majątek A . . . .  $3x$ .

Majątek A, z zyskiem . . . .  $3x + 12$  albo  $4x$ .

*Warunek.*  $4x = 3x + 12$ .

*Przerabianie.* (Odiawszy  $3x$  po obu stronach)  $1x = 12$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 12$ . Majątek B.

$3x = 36$ . Majątek A.

$4x = 48$ . Majątek A, z zyskiem.

$3x + 12 = 48$ . Majątek A, z zyskiem.

*Sprawdzenie.* Dwa wyrażenia majątku A, wraz z zyskiem są równe.

*Inne przykłady.* A, ma 3 razy tyle, ile B. A, zyskuje 12 Zł: i ma potem 5 razy tyle, ile B.

A, ma 3 razy tyle, ile B: B zyskuje 12 Zł: i potem A, mieć będzie tylko 2 razy tyle, ile B.

15. Zadanie 5. A, ma trzy razy tyle, ile B: A, i B, zyskują po 12 Zł: po czym A, ma tylko dwa razy tyle, ile B.

*Arytmetycznie.* Aby majątek A, był po zarobku trzy razy większy od majątku B, z zarobkiem; trzeba by zyskać osobie A, trzy razy tyle, ile zyskała osoba B, to jest trzeba by ić zyskać 36 Zł: A że zyskuje tylko 12 złotych; więc po tym zysku nie dostaie ić jeszcze 24 Zł. aby 3 razy tyle miała, ile B, także z zyskiem. Ze zaś osoba A, po zarobku z obu stron ma tylko 2 razy tyle, ile B; więcby nad to trzeba ić mieć jeszcze tyle, ile ma B, aby majątek ić był 3 razy tak wielki, jak jest majątek B: a zatem majątek B po zarobku jest 24 Zł: a przed zarobkiem był 12 złotych.

Pierwszy majątek B . . . . 12. Drugi majątek B . . . . 24.

Pierwszy majątek A . . . . 36. Drugi majątek A . . . . 48.

*Algebraicznie. Mianow:* Majątek 1wszy B . . . .  $x$ .

Majątek 1wszy A . . . .  $3x$ .

Majątek 2gi B . . . .  $x + 12$ .

Majątek 2gi A . . . .  $3x + 12$ , al-

bo . . . . .  $2x + 24$ .

*Warunek*



*Warunek.*  $3x + 12 = 2x + 24$ .

*Przerabianie.* (Odiąwszy 12 z obu stron)  $3x = 2x + 12$ .  
(Odiąwszy  $2x$  z obu stron)  $ix = 12$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 12$ . Maiątek 1wszy B.  
 $3x = 36$ . Maiątek 1wszy A.  
 $x + 12 = 24$ . Maiątek 2gi B.  
 $3x + 12 = 48$ . Maiątek 2gi A.  
 $2x + 24 = 48$ . Maiątek 2gi A.

*Sprawdzenie.* Dwa wyrażenia majątku powtórnego A, są równe.

14. *Przykład 2.* A, ma 5 razy tyle, ile B: zyskują po 18 złotych; i potem A, ma tylko 3 razy tyle, ile B.

*Przez rozumowanie.* Aby majątek A, był i po zysku 5 razy tak wielki, jak jest majątek B, z zyskiem swoim, trzeba by też, aby i zysk A, był 5 razy większy od zysku B, to jest, aby był 90 Zł. Ze zaś zysk A, jest tylko 18 złotych, więc po zysku będzie jeszcze brakowało osobie A, 72 złotych do wyrównania majątku B, 5 razy wziętego. A że majątek A, wraz z zyskiem, jest tylko 3 razy większy od majątku B, także z zyskiem; więc aby wyrównał majątek B, wraz z zyskiem pięć razy wzięty, nie dostaie jeszcze majątku B, i z zyskiem, 2 razy wziętego: więc majątek B i z zyskiem 2 razy wzięty jest 72 Zł: a zatem raz wzięty i z zyskiem, jest 36 Zł. Osoba tedy B, miała przed zyskiem 18 złotych.

Maiątek 1wszy B . . . . 18. Zł. Maiątek 2gi B . . . . 36. Zł.  
Maiątek 1wszy A . . . . 90. Zł. Maiątek 2gi A . . . . 108. Zł.

*Przez Algebrę. Mian:*

Maiątek 1wszy B . . . .  $x$ .  
Maiątek 1wszy A . . . .  $5x$ .  
Maiątek 2gi B . . . .  $x + 18$ .  
Maiątek 2gi A . . . .  $5x + 18$ .  
albo . . . .  $3x + 54$ .

*Warunek.*  $5x + 18 = 3x + 54$ .

*Przered:* (Odiawszy  $3x$  z obu stròn,)  $2x + 18 = 54$ .

(Odiawszy 18 z obu stròn,)  $2x = 36$ .

(Podzieliwszy przez 2 z obu stròn)  $x = 18$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 18$ . Maiątek 1włzy B.

$5x = 90$ . Maiątek 1włzy A.

$x + 18 = 36$ . Maiątek 2gi B.

$3x + 54 = 108$ . Maiątek 2gi A.

$5x + 18 = 108$ . Maiątek 2gi A.

*Sprawdz:* Dwa wyrażenia maiątku 2giego A, są równe.

*Inszé przykłady.* Oyciec, który teraż trzy razy starszy jest od syna, za lat 15 będzie tylko dwa razy od niego starszym, ileż teraż má lat tén oyciec, ilé syn?

A, má 5 razy tylé, ilé B, A, zyskuie 12 Zł. B, zyskuie 20 złotych. Po tym zysku, A, mieć tylko będzie 3 razy tylé, ilé B: iakiż jest maiątek A, iaki B?

15. *Uwaga.* Gdyby nám przyszło rozwiązywać następujące Zadanie: A, má 3 razy tylé, ilé B: tracą po złotych 15, i potém A, mieć będzie 4 razy tylé, ilé B: chcąc znaleźć maiątek A, i B, postąpilibysmy sobie podobnie iak wyżej, z tą tylko różnicą, żeby zacząć trzeba działanié od maiątku tych dwóch osób po stracie, skąd łatwoby potém doszło się przez dodanié, ilé miały przed stratą.

16. *Zadanie 6.* Mąż zapisuie testamentém żonie swoiey złotych 14000, ieżeli powiie Córkg, téy zaś Córce Zł: 7000: przeciwnie, ieżeli powiie Syna, tedy Synowi zapisuie Zł: 14000, a Matce 7000. Zdárzá się, iż Matka powiia razem Syna i Córkg. Jakże przyydzie podzielić bez krzywdy między Matkg i Dzieci maiątek Męża?

*Arytmetycznie.* Zdaie się bydz tén zamiár w testamentcie, aby Syn miał tylé dwoie co Matka, a Matka tylé dwoie co Córka. Podług tego, iakázkolwiek część maiątku dostałaby się Córce; Matka powinna będzie wziąć tylé dwoie co Córka, Syn tylé dwoie co Matka, a tylé czworo co Córka. Té tedy trzy Osoby będą miały między sobą 7 części maiątku, z których każda równać się będzie udziałowi Córki. Podzieliwszy więc tén maiątek na 7 równych części, Córka weźmie iedną taką część, Matka 2, a Syn 4. A że

14000.



14000 i 7000, czyni 21000 Zł: i składa cały majątek, a siódma jego część  
- jest 3000 Zł: więc dostanie się

Córce . . . . . 3000 Złotych.  
Matce . . . . . 6000.  
Synowi . . . . . 12000.

---

Summa 21000.

*Algebraicznie.* Część dla Córki . . . . .  $x$ .  
Część dla Matki . . . . .  $2x$ .  
Część dla Syna . . . . .  $4x$ .

---

Summa . . . . .  $7x$ .

*Warunek.*  $7x = 21000$ .

*Przerabianie.* (Podzieliwszy przez 7 z obu stron)  
 $ix = 3000$ .

*Rozwiąz.*  $ix = 3000$ . Udział Córki.  
 $2x = 6000$ . . . . . Matki.  
 $4x = 12000$ . . . . . Syna.

---

$7x = 21000$  Cały majątek.

*Inszé przykłady.* Trzy Osoby: A, B, C, złożyły się na 36000 Zł.  
Składka B, dwa razy większą od składki A, składka zaś C, trzy razy wię-  
kszą od składki B.

Cztery Osoby: A, B, C, D, złożyły się na 20000 Złotych.  
Składka B, dwa razy większą, od składki . . . . . A.  
C, trzy razy większą, od . . . . . A.  
D, cztery razy większą, od . . . . . A.

17. Zadanie 7. A, ma więcej 18 Zł: niż B.  
B, ma więcej 30 Zł: niż C.

Mają zaś razem 150 Zł: ileż ma każda Osoba w szczególności?

*Arytmetycznie.* C, najmniejszy ma z tych trzech Osób. Ponie-  
waż A, ma więcej 18 Złotych niż B, B, zaś więcej 30 Zł: niż C; więc A,  
B 2. . . . . mieć

nieć będzie 48 Złotych, więcej niż C. Summa Maiątku B, i C, równa jest maiątkowi C, dwa razy wziętemu, i nadto 30 Złotych. Summa zaś maiątku A, B, i C, równa jest maiątkowi C trzy razy wziętemu, dodawszy 30 i 48 Zł: to jest, dodawszy 78 Złotych. Więc maiątek C, trzy razy wzięty, dodawszy do niego 78 Złotych, uczyni 150 Zł: a zatem sam maiątek C, trzy razy wzięty, mniejszy będzie 78 Złotemi, to jest, wyniesie tylko na 72 Złote. Więc maiątek C, sam przez się, jest trzecią częścią 72 Zł: to jest 24 Zł:

Maiątek C . . . . . 24. Złote.

Maiątek B . . . . . 54.

Maiątek A . . . . . 72.

---

Summa . . . . . 150.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Maiątek C . . . . .  $x$ .

Maiątek B . . . . .  $x + 30$ .

Maiątek A . . . . .  $x + 48$ .

---

Summa Maiątków . . .  $3x + 78$ .

*Warunek.*  $3x + 78 = 150$ .

*Przerób:* (Odiawszy 78 Zł: z obu stron)  $3x = 72$ .

(Podzieliwszy przez 3) . . .  $x = 24$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 24$ , Maiątek C,

$x + 30 = 54$ , Maiątek B,

$x + 48 = 72$ , Maiątek A.

$3x + 78 = 150$ , Summa Maiątków.

*Inszy przykład.* A, ma więcej 14 Zł: niż B.

B, ma więcej 20 Zł: niż C.

Summa maiątku tych trzech Osób jest 172 Złote.

18. *Uwaga.* W poprzedzających przykładach, oprócz dwóch pierwszych warunków, czyli wiadomości, dana jeszcze jest i trzecia, to jest, summa maiątku trzech Osób. Gdyby zamiast téj trzeciej wiadomości, była nam dana różnica maiątku A, i C, i ta w przykładzie pierwszym inna była a nie 48 Zł: tedy zadanie byłoby niepodobne do rozwiązania. Gdyby zaś ta różnica dana nie inną była iak 48 Złotych; tedy ta trzecia wiadomość nie byłaby



byłaby nową, boby się już zamykała we dwóch pierwszych wiadomościach razem złączonych. Warunki więc, czyli wiadomości w zadaniu wyrażone powinny być dane takie, aby jedné od drugich nie zawiły.

19. Zadanie 8. *A*, má więcéy 48 Zł: niż *B*,

*C*, má tylé, ilé *A*, wráz z *B*.

Summa majątku tych trzech Osób jest 400 Zł: iléž má każda z osobna?

*Arytmetycznie.* Ponieważ *C*, má tylé, ilé razém *A*, i *B*; więc majątek *C*, jest połową majątku *A*, *B*, *C*; toieśť *C*, má w saméy rzeczy 200 złotych, a zatém *A*, i *B*, razém mieć též będą 200 Zł: Ze zaś *A*, má więcéy 48 złotych niż *B*; więc *A*, mieć będzie 24 Zł: więcéy niż 100 Zł: *B*, zaś mieć będzie 24 Zł: mniéy niż 100 złotych.

Majątek *A* . . . . . 124 Zł.

Majątek *B* . . . . . 76.

Majątek *C* . . . . . 200.

---

Summa majątków . 400.

*Algebraicznie. Mian:* Majątek *B* . . . . .  $x$ .

Majątek *A* . . . . .  $x + 48$ .

Majątek *C* . . . . .  $2x + 48$ .

---

Summa . . . . .  $4x + 96$ .

*Warunek.*  $4x + 96 = 400$ .

*Przerábianie.* (Odiąwszy 96 z obu stron)  $4x = 304$ .  
(Podzieliwszy przez 4)  $x = 76$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 76$ . Majątek *B*.

$x + 48 = 124$ . Majątek *A*.

$2x + 48 = 200$ . Majątek *C*.

$4x + 96 = 400$ . Summa Majątków.

*Inszé przykłady.* *A*, má więcéy 54 Zł: niż *B*.

*C*, má dwa razy tylé, ilé *A*, i *B*, razém.

Summa majątku tych trzech Osób jest 288 Zł: iléž má każda z osobna?

*Arytmetycznie.* Ponieważ *C*, má tylé dwoie, ilé *A*, i *B*, razém; więc summa majątków *A*, *B*, *C*, jest trzy razy więkšzą od summy majątków

ków A, i B: a zatem summa majątków A, i B, będzie trzecią częścią Zł: 288, to jest będzie 96 Zł. Stąd podobnie, iak wyżej, doysdź można majątku A, i B.

*A, ma więcéy 144 Zł: niż B.*

*C, ma trzy razy tylé, ilé A, i B, razém.*

*Summa majątku tych trzech Osób, iest 600 Zł: iléż ma każda z osobna?*

20. Zadanie 9. Dwie Osoby A, i B, oddalone na mil 96, iadą ku sobie, i naostatek spoiykają się z sobą. Pierwsza uieżdża na dzień mil 7, a druga mil 5, w iléż dni spotkają się z sobą, i ilé mil uiedzie przed spotkaniem się każda z tych Osób w szczególności?

*Arytmetycznie.* A, i B, przybliżają się do siebie co dzień sumą mil 7, i 5, to jest milami 12: więc tylé dni do siebie iadą, ilé razy powtórzyć trzeba mil 12, aby tak powtórzone uczyniły mil 96. Znaydziemy zatem liczbę dni ich iazdy, dzieląc 96 przez 12, a ta będzie 8. W ośmiu tedy dniach zjadą się z sobą.

Pierwsza Osoba w tych dniach 8 uiedzie mil . . . . 56.

Druga Osoba w tych dniach 8 uiedzie mil . . . . 40.

Obiedwie razém w tych 8 dniach niadą mil . . . . 96.

*Algebraicznie.* Mian: Dni iazdy A, i B . . . . .  $x$ .

Osoba A, uiechała mil . . . . .  $7x$ .

. . . . B, uiechała mil . . . . .  $5x$ .

Mile od A, i B, uiechane . . . . .  $12x$ .

*Warunek.*  $12x = 96$ .

*Przerobienie.* (Podzieliwszy przez 12 z obu stron)  $x = 8$ .

*Rozwiązanie.*  $1x = 8$ . Dni iazdy.

$7x = 56$ . Mile iazdy A.

$5x = 40$ . Mile iazdy B.

$12x = 96$ . Mile iazdy A, i B.

*Insze przykłady.* A, uieżdża na dzień mil 6, B, mil 8: oddalone są przed zaczęciem drogi na mil 126.

*A, uieżdża*



*A, uieżdża na dzień mil 7, B 8: oddaleni są przed tą podróżą na mil 135.*

*Pewną Osoba kupuje dwoiakięgo gatunku sukna w równy liczbie łokci: iednego łokci płaci po Zł: 12, a drugiego po Zł: 15. Za wszystko zaś wyliczyła Zł: 378: ileż łokci wzięta tego sukna?*

21. *Przeſtrogą.* Droga przez iedną ze dwóch Osób uiechaną, iest w piérwſzym przykładzie 7 mil, tylé razy wzięté, ilé dni iechała taż Osoba: powinnyby więc ta droga bydź oznaczoną przez razy  $x$  wzięté 7 mil, czyli przez  $x7$ . Ale że liczba ze dwóch inſzych rozmnożoną, taż sama wypádá, którąkolwiek z nich weźmiemy za mnożnika, lub mnożnégo, przeto zgodzono się, aby piérwſzy zawſze kładź znak liczebny, a drugi literalny liczbę takżé oznaczający, gdy takich dwóch znaków mnożenie wyrazić chcemy. I tak, nie piérze się  $x7$ , ale  $7x$ . Tén piérwſzy znak 7, nazwać można *Spółczynnikiem* (Coefficiens) znaku literalnégo  $x$ . Spółczynnik wyrażá zawſze, ilé razy wzięta iest ilość literalná, iak tu np:  $x$ .

22. *Zadanie 10.* Złodziey uciekający ubiegá na dzień mil 5. Pogoń w 8 dni po wieczerze za nim wyſtá, uieżdża na dzień mil 7: za iléż dni dogoni złodzieia Pogoń, i iak wiele mil uydzie złodziey, nim będzie dogoniony?

*Arytmetycznie.* Ponieważ złodziey 8 dniami wymknął się przed Pogonią, a 5 mil na dzień ubiegá; więc w 8 dniach ubiegł mil 40. Pogoń, która co dzień 2 mile więcej uieżdża od złodzieia, przybliża się téż co dzień do niego dwoma milami. A że ta Pogoń má się ze wſzystkiem przybliżyć 40 milami do złodzieia, więc liczba dni iazdy pogoni tylá bydź powinna, ilé razy rozmnożone 2 mile uczynią mil 40: ta zaś liczba iest 20: więc 20 dni trzeba pogoni, aby złodzieia doścignęła.

Dni iazdy pogoni . . . 20.

Mile od Pogoni uiechané . . . 20 razy 7, to iest 140.

— Dni uiekania złodzieia . . 28.

Mile od złodzieia ubiezone . . . 28 razy 5, to iest 140.

Więc po tylu dniach złodziey będzie dogoniony.

*Algebraicznie.* Mian: Dni ścigania złodzieia . . .  $x$ .

Dni uiekania złodzieia . . .  $x + 8$ .

Mile

Mile ścigającego . . . . .  $7x$ .

Mile uciekającego . . . . .  $5x + 40$ .

Warunek.  $7x = 5x + 40$ .

Przerabianie. (Odiąwszy  $5x$  z obu stron)  $2x = 40$ .  
(Podzieliwszy przez 2)  $1x = 20$ .

Rozwiązanie.  $1x = 20$ . Dni ścigania.

$x + 8 = 28$ . Dni uciekania.

$7x = 140$ . Milę ścigającego.

$5x + 40 = 140$ . Milę uciekającego.

Sprawdzenie. Tyle mil ubiegł złodziey, ile i pogoń z mieysca ucieczki.

Inszé przykłady. Złodziey ubiega 6 mil na dzień,

Pogoń ubiega 9 mil na dzień.

Złodziey 12 dniami uszedł przed pogonią.

Kupie kto pewną liczbę łokci sukna iednego gatunku po Zł: 15. Kupie drugiego gatunku, więcéy 8 łokci niż pierwszego, po Zł: 11: tyle ze wszystkiém płaci za pierwsze sukno, ile za drugie: iakże wiele łokci wziął z każdego gatunku?

23. Zadanie 11. Pewná Osoba wybrała sobie dwie materye, z których iedną chce kupić. Łokieć iedney z tych materyy jest po Zł: 15, a drugiéy po Zł: 13. Jeżeli kupi pierwszý tyle łokci, ile iéy potrzeba, zostanie iéy Zł: 24: jeżeli zaś tyléż łokci kupi drugiéy, zostanie iéy tylko Zł: 3. Iléż łokci chciała kupić, i ile miała piéniędzy?

Arytmetycznie. Ponieważ téy osobie w pierwszym razie, zostałoby się 24 Zł: a w drugim tylko 3 Zł; więc w drugim razie, wydałaby 21 Zł: więcéy, niż w pierwszym, a to dla tego, że każdy łokieć drugiéy materyi płaciłaby 3 złotémi drożéy, niż łokieć pierwszý. Więc trzy złoté tyle razy wzięte, ile ta osoba kupiłaby materyi łokci, czynią Zł: 21, a ieden złoty wzięty tyle razy, ile má być kupionych łokci, uczyni trzecią część Zł: 21, toieś 7 Zł: chciała tedy ta osoba kupić łokci 7.



Liczba łokci . . . . . 7.  
 Zapłata za łokci 7 piérwshéy matéryi Zł: . . . . . 105.  
 Zapłata za łokci 7 drugiéy matéryi . . . . . 126.  
 Miała ta Osoba piénędzy Zł:  $105 + 24 = 129$ , albo . . . . .  
 . . . . .  $126 + 3 = 129$ .

*Algebraicznie. Mianowanie.* Liczba łokci .  $x$ .  
 Zapłata całá za piérwszy gatunek .  $15x$ .  
 Zapłata całá za drugi gatunek .  $18x$ .  
 Maiątek téy Osoby . . . . .  $15x + 24$ , albo  $18x + 3$ .

*Warunek.*  $18x + 3 = 15x + 24$ .

*Przerób:* (Odiąwszy 3 z każdéy strony)  $18x = 15x + 21$ .  
 (Odiąwszy  $15x$  z każdéy strony)  $3x = 21$ .  
 (Podzieliwszy przez 3) . . . . .  $x = 7$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 7$ . Liczba łokci.  
 $15x = 105$ . Zapłata za 7 łokci piérwshéy matéryi.  
 $18x = 126$ . Zapłata za 7 łokci drugiéy matéryi.  
 $15x + 24 = 129$ . Liczba Zł: Osoby kupiáccéy.  
 $18x + 3 = 129$ . Táz sama liczba.

*Sprówdz:* Dwa wyrażenia maiátku téy Osoby są równé.

*Inszé przykłady.* Kupiác pewną liczbę łokci iednéy matéryi po Zł: 17, a drugiéy po Zł: 13, zostaie się Osobie kupiáccéy w piérwszym razie Zł: 15, a w drugim Zł: 47.

Dwie Osoby razém naprzeciwko siebie wyicżdżaią: iedna wieżdżá na dzień mil 8, a druga mil 5. Gdy się z sobą spotykaią piérwsza niechala mił 24 wiécéy niż druga.

Naięto pewną liczbę robotników, i obiećcano každému po gr. 15: inszym zaś robotnikom, których tylé było, ilé piérwszych obiećcano po gr. 12. Wzięli piérwsi razém 27 gr. wiécéy niż drudzy.

Inszą znouu razą naięto także pewną liczbę robotników: gdyby im płacono po gr. 12, iészceby nie dostaowało najmniéj gr. 25: gdy zaś každému tylko płacić będzie po gr. 9, zostanie mu gr. 35. Iléż najmnie robotników, i ilé má piénędzy?

W tym ostatnim przykładzie, ponieważ Osobie najmniejszą robotników w pierwszym razie nie dostałoby gr. 25, a w drugim zbywałoby gr. 35; więc w pierwszym razie musiałaby ta Osoba płacić 25, i 35 gr. to jest 60 gr. więcej niż w drugim. Co oprócz wielu innych sposobów, można i tak okazać.

Fig. 7.

Niech linią AB, oznacza małątek téj Osoby. Ponieważ w pierwszym razie więcejby iéy 25 gr. nad małątek zapłacić przychodziło, niech więc linią AC, większą od AB, linią BC, wyraża tę całą zapłatę, a różnica BC tych dwóch linii niech wyraża 25 gr.

W drugim zaś razie, gdzieby mniej ta Osoba zapłacić miała, niech to wyraża linią AD, mniejszą od AB, linią BD, a zatem niech linią BD, wyraża 35 gr. A że linią AC, przewyższa linią AD, summą linii BC, BD, to jest linią CD, więc téż i wydatek pierwszy téj Osoby przewyższałby wydatek drugi summą 25, i 35 gr. to jest 60 gr.

Postępując sobie Algebricznie, nazwalibyśmy liczbę robotników  $x$ , całą ich zapłatę w pierwszym razie  $12x$ , a w drugim  $9x$ . Dla oznaczenia zaś małątku téj Osoby w pierwszym razie, odjęlibyśmy 25 gr. od  $12x$ : w drugim dodalibyśmy 35 gr. do  $9x$ . Małątek więc téj Osoby takby się wyraził:  $12x - 25$  (znak — kładzie się przed tą ilością, która się od innéj má odjąć, i wymawia się *mniej*) albo tak:  $9x + 35$ . Lubo dalsze postępowanie nie w sobie trudnego nie zamyka, nie zawadzi jednak tu ié wyłożyć.

$$\text{Warunek. } 12x - 25 = 9x + 35.$$

Przerobienie. (Dodawszy 25 po obu stronach)

$$12x = 9x + 60.$$

(Odiawszy  $9x$  po obu stronach)

$$3x = 60.$$

(Podzieliwszy przez 3 obie strony)

$$x = 20.$$

24. Zadanie 12. Małątki trzech Osób A, B, C, są takie, że

Summa Małątków A, i B, czyni . . . . . Zł: 24.

. . . . . A, i C, czyni . . . . . 28.

. . . . . B, i C, czyni . . . . . 36.

Ilż má każda z tych Osób w szczególności?

Arýtme.



*Arytmetycznie. Sposób 1.* Gdy do majątku A, dodamy osobno majątki B, i C, będzie summa za drugą razą większą 4 Zł: niż za pierwszą, a zatem C, má więcéy 4 Zł: niż B: a że B, wraz z C, má Zł: 36; więc majątek C, większy jest 2 Zł: od 18, a majątek B, mnieyszy jest 2 Zł: od Zł: 18.

Má tedy C, Zł: 20, a B, Zł: 16: że zaś A, i B, mają razem Zł: 24; więc A, má Zł: 8.

Majątek A . . . . . 8 Zł.  
 . . . . . B . . . . . 16.  
 . . . . . C . . . . . 20.

*Sposób 2.* Majątek A, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . .

24, i 28.

Majątek B, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . .

24, i 36.

Majątek C, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . .

28, i 36;

a zatem summa majątku trzech Osób A, B, C, dwa razy wziętą, równą jest summie liczb; 24, 28, 36, poiedynczo wziętę, to jest 88. Summa więc majątków A, B, C, jest połową summy liczb 24, 28, 36, to jest połową 88, czyli 44:

Ze zaś B, i C, mają razem 36 Zł: więc A, má 8 Zł.

A, i C, mają razem 28 Zł: więc B, má 16.

A, i B, mają razem 24 Zł: więc C, má 20.

*Algebraicznie.* Między inżemi sposobami, następujący zdaie się bydz w rozwiązywaniu podobnych zadań nayogólnieyszim, w którym od mianowania summy majątku trzech Osób, zaczynamy.

*Mianowanie.* Summa trzech majątków . . . .  $x$ .

Majątek A . . . . .  $x - 36$ .

B . . . . .  $x - 28$ .

C . . . . .  $x - 24$ .

Warunek może bydz czworako wyrażony. Bo albo można go sład wywieśdz, że summa trzech wyrażeń majątków szukanych, powinny bydz równą summie oznaczoney przez  $x$ ; albo sład, że summa dwóch wyrażeń

tych majątków powinna być równą summie daney. Weźmy *np.* ten warunek, że summa majątków A, i B, powinna być równą 24 Zł. Summa majątków A, i B, jest . . . .  $2x - 64$ .

*Warunek.*  $2x - 64 = 24$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy 64 po obu dwóch stronach)  $2x = 88$ .  
(Podzieliwszy przez 2 obie strony)  $x = 44$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 44$ . Summa trzech majątków.

$x - 36 = 8$ . Majątek A.

$x - 28 = 16$ . Majątek B.

$x - 24 = 20$ . Majątek C.

*Sprawdzenie.* Te trzy liczby 8, 16, 24, czynią zadosyć trzem warunkom podanym.

*Insze przykłady.* Imo. A, i B, mają razem . . . 32 Zł.

A, i C, . . . . . 37.

B, i C, . . . . . 45.

ado. A, i B, mają razem . . 49.

A, i C, . . . . . 57.

B, i C, . . . . . 64.

25. Zadanie 13. Majątek między czterema osobami A, B, C, D, jest taki, że

Summa Majątków A, B, C . . . 36.

A, B, . . . D. 42.

A . . . C, D. 47.

B, C, D. 52.

Ilż, ma każda z tych Osób w szczególności?

*Arytmetycznie.* Podobnie, iak wyżej, rozumując, dochodzimy, iż summa tych majątków czterech niewiadomych trzy razy wzięta, równa się summie pojedynczey czterech liczb danych, to jest liczbie 177. Więc summa pojedynczą czterech majątków niewiadomych, równa jest trzeciéy części liczby 177, to jest 59: a zatem majątki szczególne Osób A, B, C, D, będą różnicą



różnicą między tą liczbą 59 i liczbami 52, 47, 42, 36, osobno wziętymi:  
tými zaś różnicami są liczby . . . 7, 12, 17, 23.

*Algebraicznie. Mian:* Summa Maiątek . . .  $x$ .

Maiątek A . . . . .  $x - 52$ .

B . . . . .  $x - 47$ .

C . . . . .  $x - 42$ .

D . . . . .  $x - 36$ .

Summa 4 Maiątek .  $4x - 177$ .

*Warunek.*  $4x - 177 = x$ .

*Przerób:* (Dodawszy 177 po obu stronach)

$$4x = x + 177.$$

(Odiawszy  $1x$  po obu stronach)

$$3x = 177.$$

(Podzieliwszy przez 3 obiedwie strony)

$$1x = 59.$$

*Rozwiązanie.*  $x = 59$ .

$$x - 52 = 7. \text{ Maiątek A.}$$

$$x - 47 = 12. \text{ Maiątek B.}$$

$$x - 42 = 17. \text{ Maiątek C.}$$

$$x - 36 = 23. \text{ Maiątek D.}$$

*Inszé przykłady.* Maiątek między 5 Osobami A, B, C, D, E,  
jest taki, że

Summa Maiątek: A, B, C, D . . . jest . . . 16.

A, B, C, . . . E . . . . . 18.

A, B, . . . D, E . . . . . 23.

A, . . . C, D, E . . . . . 25.

. . . B, C, D, E . . . . . 26.

Maiątek między 6 Osobami, A, B, C, D, E, F, jest taki, że

Summa maiątek A, B, C, D, E . . . jest . . . 24.

A, B, C, D, . . . F . . . . . 28.

A, B, C, . . . E, F . . . . . 32.

A, B, . . . D, E, F . . . . . 33.

A . . . C, D, E, F . . . . . 34.

. . . B, C, D, E, F . . . . . 35.

26. Zadanie 14. *A*, ma 60 Zł. *B*, ma 20 Zł. *A*, tylé zyskuie co *B*: zyskujączy zaś jednakową summę; *A*, mieć tylko będzie tylé dwoie, co *B*: ileż zyskuie?

*Arytmetycznie.* Ponieważ *A*, przed zyskiem tylé troie ma co *B*, przed zyskiem; więc iakążkolwiek byłaby ta summa którą zyskuie *B*, ieżeli *A*, chce mieć zawlże tylé troie co *B*, trzeba ieý téż zyskać tylé troie, ilé zyskuie *B*: a że podług zadania, *A*, zyskuie tylé tylko, ilé *B*, niedostawać ieý iefzcze będzie tylé dwoie zysku *B*, aby miała wraz z tym zyskiem, trzy razy tylé, ilé ma *B*, wraz także z zyskiem. Więc zysk *B*, dwa razy wzięty równa się majątkowi *B*, wraz z zyskiem raz wziętym. A że majątek *B*, z zyskiem składa się z pierwiałtkowego majątku 20 Zł. i z zysku; więc zysk *B*, dwa razy wzięty, równy iest summie z 20 Zł. i z zysku raz wziętego: a zatem zysk *B*, który ma być taki, iak i zysk *A*, iest 20 złotych.

I tak *A*, mieć będzie z zyskiem . . . 80 Zł.

*B*, mieć będzie z zyskiem . . . 40.

80, iest 2 razy tylé, ilé 40.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Zysk każdej osoby . .  $x$ .

Majątek *B*, wraz z zyskiem . .  $20 + x$ .

Majątek *A*, wraz z zyskiem . .  $60 + x$ .

albo . . . . .  $40 + 2x$ .

*Warunek.*  $40 + 2x = 60 + x$ .

*Przerabianie.* (Odiąwszy 40 po obu stronach)

$$2x = 20 + x.$$

(Odiąwszy  $x$  po obu stronach)

$$x = 20.$$

*Rozwiązanie.*  $x = 20$ . Zysk szukany.

$20 + x = 40$ . Majątek *B*, z zyskiem.

$60 + x = 80$ . Majątek *A*, z zyskiem.

$40 + 2x = 80$ . Drugie wyrażenie majątku *A*, z zyskiem.

*Sprówdzenie.* Dwa wyrażenia majątku *A*, z zyskiem są równé.



*Infzł przykład. Oysiec má lät 54. Syn 18: za ilêž lät Oyciec dwa razy tylko starszy będzie od Syna?*

*A, má 50 Zł: B, má 18 Zł: iakêž summe maiz iednakowâ zyskat, aby zyskawszy iâ, maiztek A, był tylko tylé dwoie, tak wielki, iak maiztek B?*

Spółób dochodzenia Algiebraiczny ténže sãm iest co wyżey. Arytmetycznie zaś chcąc dochodzić rozwiązania, następujący sposób wygodniejszy iest od poprzedzającego w tych przypadkach, gdzie pierwszy maiztek A, nie zawierałby w sobie maiztku pierwszego B, kilka zupełnych razy.

Maiztek pierwszy A, zawiera w sobie maiztek B, razy 2, i jeszcze 14 Zł: zostaie. A że po iednakowym zysku, A, má mieć dwa razy tylé, ilé B; więc summa z 14 Zł: i tego zysku powinna byđz 2 razy takâ, iak 14, a zatém zysk iednakowy obudwóch Osób, będzie 14 Zł:

To rozumowanie może byđz objaśnione, wyrażając maiztki i zyski Fig. 2. przez liniie. Niech liniâ AB, wyrażâ maiztek A, toiest Zł: 50, a liniâ CD, maiztek B, toiest Zł: 18.

Weźmiymy na liniî AB, część AF, dwa razy tak wielkâ, iak iest CD. Niech znowu liniâ DZ równâ liniî BX, oznaczâ zysk iednakowy.

Całâ liniâ AX, będzie dwa razy tak wielkâ, iak liniâ CZ: a że część AF, iest dwa razy tak wielkâ, iak liniâ CD; więc též i liniâ FX, musi byđz dwa razy tak wielkâ iak DZ, albo BX, a zatém liniie BF, BX, sâ równé.

27. Zdanie 15. *A, má trzy razy tylé, ilé B: B, bierze od A, Zł: 12, i má potém połowę tylé, ilé A.*

*Arytmetycznie.* Aby maiztek A, był iednostaynie większy razy trzy od maiztku B, tedy ieżeli B, zysknie Zł. 12, zysk A, powinienby též byđz Zł. 36.

A że A, zamiast zyskania złotych 36, traci złotych 12, więc nie dostaie ieszcze do tego złotych 48, aby maiztek A, był trzy razy tak wielki, iak iest maiztek B, po nabytych złotych 12. Má zaś A, udzieliwszy złotych 12 dla B, tylko dwa razy tylé, ilé B zyskawszy złotych 12, więc nie dostaie Osobie A, maiztku Osoby B, wraz z zyskiem, aby miała trzy razy tylé, ilé B, i z tym zyskiem, toiest, nie dostaie iey Zł: 48: a zatém maiztek Osoby B, wraz z zyskiem iest złotych 48, a przed zyskiem był Zł: 36.

Maiztek 1wszy B	...	36. Zł.
Maiztek 1wszy A	...	108.
Maiztek 2gi B	...	48.
Maiztek 2gi A	...	96.

Algic-

*Algebraicznie. Mia:* Maiątek 1wszy B . . . .  $x$ .  
 Maiątek 1wszy A . . . .  $3x$ .  
 Maiątek 2gi B . . . .  $x + 12$ .  
 Maiątek 2gi A . . . .  $3x - 12$ .  
 albo . . . .  $2x + 24$ .

*Warunek.*  $3x - 12 = 2x + 24$ .

*Przerabianie* (Dodawszy 12 po obu stronach)

$$3x = 2x + 36$$

(Odiawszy  $2x$  po obu stronach)

$$1x = 36.$$

*Rozwiązanie.*  $1x = 36$ . Maiątek 1wszy B.  
 $3x = 108$ . Maiątek 1wszy A.  
 $x + 12 = 48$ . Maiątek 2gi B.  
 $3x - 12 = 96$ . Maiątek 2gi A.  
 albo  $2x + 24 = 96$ . Maiątek 2gi A.

*Sprawdzenie.* Dwa wyrażenia drugiego maiątku A, są równe.

*Insze przykłady.* A, ma trzy razy tyle, ile B: A, zyskuje od B, Zł: 20, i ma potem 5 razy tyle, ile B.

Chcąc z łatwością rozwiązać arytmetycznie to Zadanie, trzeba je tak nważyć, iak gdyby wyrażone było w spos.b następujący: A, ma 5 razy tyle, ile B: B, zyskuje od A, Zł: 20, i potem A, ma tylko trzy razy tyle, ile B.

A, ma 5 razy tyle, ile B: A, traci Zł: 20. B, zyskuje Zł: 36: potem A, ma tylko trzy razy tyle, ile B.

28. Zadanie 16. A, ma Zł: 60. B, ma Zł: 15, A, zyskuje dwa razy tyle, ile B, i potem ma tylko trzy razy tyle, ile B.

*Arytmetycznie. Spółb 1.* Aby maiątek A, był jednokrotnie 4 razy tak wielki, iak jest maiątek B, trzeba aby zysk A, był 4 razy tak wielki, iak jest zysk B. Ze zaś A, zyskuje tylko 2 razy tyle, ile B; więc nie dostaie jeszcze 2 razy zysku B, aby maiątek A, potym zysku był 4 razy tak wielki, iak maiątek B, także po zysku. Ze znowu A, po zysku swoim ma tylko trzy razy tyle, ile B; więc Maiątkowi A, po zysku, nie dostaie maiątku B, po zysku do tego, aby tenże maiątek A, był po zysku 4 razy tak wielki, iak maiątek B, także po zysku: a zatem zysk B, dwa razy wzięty, wyrównywa maiątkowi



maiątkowi B, z zyskiem raz wziętym; więc maiątek B, równa się zyskowi B, to jest B, zyskuie Zł. 15.

Zysk B Zł. . . . 15.

Zysk A . . . . 30.

Maiątek B z zyskiem Zł. . . . 30.

Maiątek A z zyskiem . . . . 90.

*Sposób 2. mogący się ogólnie przystosować.* Niech linia AB, i CD, Fig. 3. oznaczają pierwsze maiątki A, i B: B wyraża zysk B, którego szukamy: BX dwa razy tak wielką, jak DY będzie wyrażała zysk A. Weźmy AE, trzy razy większą od CD. Ponieważ AX, powinna być trzy razy większą od CY, a część AE, jest trzy razy większą od części CD; więc EX, będzie też trzy razy większą od DY. Wziąwszy BZ = XZ = DY, będzie EX trzy razy większą od XZ, a EZ, dwa razy większą od XZ, albo od BZ: a zatem EB = BZ. Przeto zysk B, równa się linii EB, albo CD, to jest 15 Zł.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Zysk B . . . .  $x$ .

Zysk A . . . .  $2x$ .

Maiątek B, po zysku . . . .  $15 + x$ .

Maiątek A, po zysku . . . .  $60 + 2x$ .

albo . . . .  $45 + 3x$ .

*Warunek.*  $45 + 3x = 60 + 2x$ .

*Przerabianie.* (Odiąwszy  $2x$  po obu stronach)  $45 + 1x = 60$ .

(Odiąwszy 45 po obu stronach) . . .  $1x = 15$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 15$ . Zysk B.

$2x = 30$ . Zysk A.

$15 + x = 30$ . Maiątek B, po zysku.

$60 + 2x = 90$ . Maiątek A, po zysku.

albo  $45 + 3x = 90$ . Maiątek A, po zysku.

*Sprawdzenie.* Dwa wyrażenia maiątku A, po zysku są równe.

*Inszé przykłady.* A, ma Zł. 100, B, ma Zł. 60. A, zyskuie 3 razy tyle, ile B, i potem ma dwa razy tyle, ile B.

A, ma Zł. 220, B, ma Zł. 80: B, zyskuie 2 razy tyle ile A, potem A, ma tylko 2 razy tyle, ile B.

29. Zadanie 17. *A*, má Zł. 60; *B*, má Zł. 42: iléž *A*, má zyskać od *B*, gdy chce mieć 2 razy tyle, ilé *B*.

Fig. 4.

Użycie linii ułatwia i tu rozwiązanie, sposobém rozumowania.

Niech linią *AB*, oznaczá piérwszy majątek *A*, 60: a linią *CD*, niech oznaczá piérwszy majątek *B*, 42. Zróbmy linią *AE*, dwa razy tak wielką, jak *CD*, i niech linie równe *BX*, *DY*, zysk *A*, a strata *B*, wyrażają. Ponieważ *AE*, dwa razy tak jest wielką jak *CD*, a téż część *AX*, powinna być dwa razy tak wielką, jak *CY*; więc i druga część *EX*, powinna być dwa razy tak wielką jak *DY*, albo *BX*: a zatem linią *EB*, powinna być trzy razy tak wielką jak *BX*, to jest linii *BX*, powinna być trzecią częścią linii *EB*: że zaś *AE*, oznaczá 84, *AB*, oznaczá 60, więc *BE*, oznaczáć będzie 24: a zatem linią *BX*, oznaczá 8.

Majątek *B*, po stracie . . . . 42 — 8 = 34.

Majątek *A*, po zysku . . . . 60 + 8 = 68.

*Algebraicznie. Mian:* Zysk *A*, lub strata *B* . . . . . *x*.

Majątek *B*, po stracie . . . . 42 — *x*.

Majątek *A*, po zysku . . . . 60 + *x*.

albo . . . . . 84 — 2*x*.

*Warunek.* 60 + *x* = 84 — 2*x*.

*Przerabianie.* (Dodawszy 2*x* po obu stronach) 60 + 3*x* = 84.

(Odiąwszy 60 po obu stronach) . . . 3*x* = 24.

(Obie strony podzieliwszy przez 3) . . *x* = 8.

*Rozw:* *x* = 8. Zysk *A*, lub strata *B*.

42 — *x* = 34. Majątek *B*, po stracie.

60 + *x* = 68. Majątek *A*, po zysku.

84 — 2*x* = 68. Drugie wyrażenie majątku *A*, po zysku.

*Inszé przykłady.* *A*, má Zł. 100; *B*, má Zł. 170: iléž *B*, má zyskać od *A*, gdy chce mieć 2 razy tyle ilé *A*?

*A*, má Zł. 120, *B*, má Zł. 55. *A*, zysknie tyle dwoie, ilé *B* traci, i mieć potém będzie 3 razy tyle, ilé *B*.

30. Zadanie 18. *A*, má Zł. 100, *B*, má Zł. 70. *A*, tyle traci, ilé *B*, má jednak potém *A*, tyle dwoie, ilé *B*.

Fig. 5.

*Arytmetycznie.* Niech linią *AB*, oznaczá Zł. 100, to jest majątek *A*, i niech linią *CD*, oznaczá Zł. 70, to jest majątek *B*. Niech linie równe *BX*,



BX, DY, wyrażają straty A, i B: i niech AE, dwa razy tak wielką będzie, jak CD.

Ponieważ AE, dwa razy jest tak wielką, jak CD, a zaś AX powinna być dwa razy tak wielką, jak CY; więc i EX, musi być dwa razy tak wielką jak DY, albo BX: a zatem linie EB, BX, powinny być równe. A że AE oznacza 140, AB, oznacza 100; więc EB, albo BX, oznaczać będzie 40.

Strata równa A, i B . . . . 40.

Majątek A, po stracie . . . . 60.

Majątek B, po stracie . . . . 30.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Strata A, albo B . . . .  $x$ .

Majątek B, po téj stracie . . .  $70 - x$ .

Majątek A, po téj stracie . . .  $100 - x$ .

albo . . .  $140 - 2x$ .

*Warunek.*  $100 - x = 140 - 2x$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy  $2x$  po obu stronach)  $100 + x = 140$ .

(Odiąwszy 100 po obu stronach)  $x = 40$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 40$ . Strata A, lub B.

$70 - x = 30$ . Majątek B, po stracie.

$100 - x = 60$ . Majątek A, po stracie.

$140 - 2x = 60$ . Drugie wyrażenie majątku A, po stracie.

*Inszé przykłady.* A, ma 120 Zł. B, ma 90 Zł. B, traci tyle dwoie, ile A, po której stracie zostaje się dla A, tyle dwoie, ile dla B.

A, ma 120 Zł. B, ma 90 Zł. A, traci tyle dwoie, ile B, po której stracie zostaje się dla B, tyle dwoie, ile dla A.

31. *Uwaga.* We dwóch ostatnich zadaniach, aby znaleźć drugie wyrażenie majątku A, trzeba było wziąć dwa razy wyrażenie majątku B, złożone ze dwóch części; z których jedna miała przed sobą znak  $-$ . I tak w zadaniu 17. trzeba było wziąć dwa razy ilość  $42 - x$ , a w zadaniu 18, trzeba było wziąć dwa razy ilość  $70 - x$ . Ilości tak rozmnożone były  $84 - 2x$ , i  $140 - 2x$ . Przy téj okoliczności przytoczymy tu, i rozbić będziemy różne przykłady rozmnożenia, w których ilość mnożyć się mającą, kładzie się ze znakiem odęymowania.

Niech będzie ilość  $42 - x$ , którą dwa razy wziąć potrzeba, czyli  
 'rozmnóżyć przez 2.

Ilé razy przysłoby brać 42, tylé razy trzebaby téż odiać  $x$ : a że 42 bierze się 2 razy; więc téż trzeba odiać  $x$ , 2 razy: a zatém ilość tak rozmnożoną, będzie  $84 = 2x$ .

Toż samo rozumowanie przystosować można i do wszystkich innych przypadków.

Mnożne. 12 — x. 13 — x. 7 — x. 15 — x. 16 — x. 18 — x.  
Mnożniki. 3. 4. 5. 6. 7. 8.  
Wieloczynny. 36 — 3x. 52 — 4x. 35 — 5x. 90 — 6x. 112 — 7x. 144 — 8x.

W drugim i w trzecim przykładzie Zadania 18, ilość niewiadomą, którą mnożyć przypada, kładzie się z Spółczynnikiem.

Z powodu tego zdarzenia, wyłożymy jeszcze na różnych przykładach i regułę mnożenia względem Spółczynników.

Jeżeli ilość  $2x$  weźmie się dwa razy; ilością rozmnożoną będzie suma, z  $2x$  i z  $2x$ , to jest  $4x$ . Jeżeli weźmiemy  $2x$  razy trzy, ilością rozmnożoną będzie trzy razy dwa  $x$ , albo 6 razy  $x$ , to jest  $6x$ . tak, iak 2 złote wzięte trzy razy, czynią 6 Zł. A w ogólności mówiąc, aby rozmnożyć ilość mającą Spółczynnika, przez liczbę całkowitą, trzeba tylko aby sam Spółczynnik téj ilości był rozmnożony przez tę liczbę całkowitą.

PRZYKŁADY.

Mnożn.	2x.	3x.	4x.	5x.	6x.	7x.	i t. d.
Mnożniki.	3.	5.	6.	7.	8.	9.	
Wieloczynny.	6x.	15x.	24x.	35x.	48x.	63x.	i t. d.

Mnożn.	6+2x.	8+3x.	5+4x.	7+8x.	11+9x.	i t. d.
Mnożniki.	2.	3.	4.	5.	6.	
Wieloczynny.	12+4x.	24+9x.	20+16x.	35+40x.	66+54x.	i t. d.

Mnożn.	3x—5.	4x—6.	5x—7.	8x—9.	10x—12.	i t. d.
Mnożniki.	2.	3.	4.	5.	6.	
Wieloczynny.	6x—10.	12x—18.	20x—28.	40x—45.	60x—72.	i t. d.

Mnożn.



<i>Mnożne.</i>	12—2x.	12—3x.	15—4x.	20—5x.	28—6x.	i t. d.
<i>Mnożniki.</i>	3.	4.	5.	6.	7.	
<i>Wieloczynny.</i>	36—6x.	48—12x.	75—20x.	120—30x.	196—42x.	i t. d.

32. Zadanie 19. Jeżeli tak A, iak i B, zyska Zł. 12; A, mieć będzie dwa razy tyle, ile B. Jeżeli zaś tak A, iak i B, straci Zł. 12; A, mieć będzie trzy razy tyle, ile B. Ilż tak A, iak i B, má przed tym zyskiem, i po zysku: i ile tak A, iak i B, mieć będzie przed tą stratą, i po stracie?

*Arytmetycznie.* A, zyskawszy 12 Zł. má 24 Zł. więcej, niż stracił; wśzy 12 Zł. B, także zyskawszy 12 Zł. má 24 Zł. więcej, niż straciłszy 12 Zł. Ponieważ A, w powtórnyim stanie majątku, trzy razy má tyle, ile B; więc aby i w pierwszým stanie majątek A, był trzy razy tak wielki, iak majątek B; trzebaby mieć A, po zysku 3 razy 24, czyli 72 Zł. więcej, niżeli má po stracie. Ze zaś po zysku má tylko 24 złote więcej niż po stracie; więc ieszcze brakuie A, po zysku Zł. 48 do tego, aby majątek A, po tymże zysku, był 3 razy tak wielki iak majątek B. Má zaś w saméy rzeczy A, po zysku, tylko dwa razy tyle, ile B: więc ieszcze nie dostaie A, majątku B, ráz wziętego, aby po zysku był trzy razy tak wielki majątek A, iak majątek B. Więc majątek B, po zysku, iest 48 Zł: a zatém przed zyskiem, B, má 36 złotych.

Majątek B, po zysku . . . . . 48 złotych.

Pierwszy majątek B . . . . . 36.

Majątek B, po stracie . . . . . 24.

Majątek A, po zysku . . . . . 96. złotych.

Pierwszy majątek A . . . . . 84.

Majątek A, po stracie . . . . . 72.

To rozumowanie objaśnić można podobnie iak wyżej na liniach.

*Algebraicznie. Mian:* Majątek B, po stracie . . . . . x.

Majątek B, przed stratą . . . . .  $x + 12$ .

Majątek B, po zysku . . . . .  $x + 24$ .

Majątek A, po stracie . . . . .  $3x$ .

Majątek A, przed stratą . . . . .  $3x + 12$ .

Majątek A, po zysku . . . . .  $3x + 24$ .

albo . . . . .  $2x + 48$ .

*Warunek*  $3x + 24 = 2x + 48$ .

Przerob: (Odiawszy 24 po obu stronach)  $3x = 2x + 24$ ,  
 (Odiawszy  $2x$  po obu stronach)  $1x = 24$ .

Rozwiązanie.  $x = 24$ . Maątek B, po stracie.

$x + 12 = 36$ . Maątek B, przed stratą.

$x + 24 = 48$ . Maątek B, po zysku,

$3x = 72$ . Maątek A, po stracie.

$3x + 12 = 84$ . Maątek A, przed stratą.

$3x + 24 = 96$ . Maątek A, po zysku.

albo  $2x + 48 = 96$ . Drugie wyrażenie majątku A, po zysku.

Inszé przykłady. Jeżeli tak A, iak B, zyska Zł. 12; A, mieć będzie 3 razy tyle, ilé B: ale jeżeli tak A, iak B, straci Zł. 12; A, mieć będzie cztery razy tyle, ilé B.

Jeżeli A, zyska Zł. 12, a B, zyska Zł. 8, A, mieć będzie trzy razy tyle, ilé B: ale jeżeli A, traci Zł. 8, a B, traci Zł. 12. A, mieć będzie 5 razy tyle, ilé B.

33. Zadanie 20. Zakład między A, i B, jest o 12 Zł. jeżeli ié wygra A, mieć będzie dwa razy tyle ilé B: jeżeli zaś wygra B, tedy mieć tyle będzie, ilé A. Ilé má A, ilé B, przed wygraną, po wygranej, lub po przegranej

Jeżeli wygra A, tedy mieć będzie 24 złoté więcej niż po przegranej. Toż mówić i o B. Nie uważając więc majątków A, i B, iak tylko po wygranej, i po przegranej; Zadanie to odniénia się w inszé podobné Zadaniu 15, i można té tak wyłożyć:

Dwie osoby A, i B, równy majątek posiadają: A, zysknie Zł. 24, które traci B, potem A, má dwa razy tyle, ilé B.

Gdy B, traci Zł. 24, jeżeli i po téy stracie, A, má mieć tyle, ilé B; trzeba ażeby i A, straciła téż Zł. 24. Alé że A, zamiast stracenia Zł. 24, zysknie jeszcze 24 złoté; więc A, po zysku má 48 Zł. więcej niżby mieć powinna, gdyby tylko tyle miała, ilé B, po stracie.

Ze zaś w saméy rzeczy A, má po zysku dwa razy tyle, ilé B; więc ten majątek A, przewyższa majątek B, tymżé majątkiem B, raz wziętym: a zatém B, po stracie 24 Zł. má tylko 48. a przed stratą miała 72 złoté.

Wrócając się do pierwszych Zadania tego wyrazów; będzie

Majątek



Maiątek B, gdy zakład wygra . . . . 72. złotych.  
 Maiątek B, przed zakładem . . . . 60.  
 Maiątek B, gdy zakład przegra . . . 48.  
 Maiątek A, gdy zakład przegra . . . 72.  
 Maiątek A, przed zakładem . . . . 84.  
 Maiątek A, gdy zakład wygra . . . . 96.

*Algebraicznie. Mian:* Maiątek B, po wygranej . . .  $x$ .  
 Maiątek B, przed zakładem . . .  $x - 12$ .  
 Maiątek B, po przegranej . . .  $x - 24$ .

Maiątek A, po przegranej . . . .  $x$ .  
 Maiątek A, przed zakładem . . .  $x + 12$ .  
 Maiątek A, po wygranej . . .  $x + 24$ .  
 albo . . . .  $2x - 48$ .

*Warunek.*  $2x - 48 = x + 24$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy 48 po obu stronach)  $2x = x + 72$ .  
 (Odiawszy  $x$  po obu stronach)  $x = 72$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 72$ . Maiątek B, po wygranej.  
 $x - 12 = 60$ . Maiątek B, przed zakładem.  
 $x - 24 = 48$ . Maiątek B, po przegranej.

$x = 72$ . Maiątek A, po przegranej.  
 $x + 12 = 84$ . Maiątek A, przed zakładem.  
 $x + 24 = 96$ . Maiątek A, po wygranej.

*Inszé przykłady.* Zakład między A. i B, jest o Zł. 20: jeżeli go A wygra, tedy mieć tyle troje będzie, ile B: jeżeli zaś wygra B, tedy A, mieć tylko będzie tyle dwójce, ile B.

Jeżeli A, wygra Zł. 24, a B, przegra Zł. 16, tedy A, mieć będzie 5 razy tyle, ile B: jeżeli zaś B, wygra Zł. 20, a A, przegra Zł. 12, tedy A, mieć tylko będzie tyle troje, ile B.

34. Zadanie 21. Maiątki czterech Osób, A, B, C, D, są takie, że A, więcej ma niż B, Zł. 40. C, więcej niż D, Zł. 60. A, trzy razy ma tyle, ile D, a C, dwa razy ma tyle, ile B. Jakież jest każdej z tych 4 Osób maiątek?

Użyte

Fig. 6.

Użycie linii ułatwi rozwiązanie tego Zadania przez rozumowanie. Niech linie AB, CD, wystawiają nam liczby 40, i 60: niech linie BX, DY wystawiają maki B, i D, a tym samym linie AX, CY, niech wystawiają maki A, i C.

Linia CY, powinna być, podług zadania, dwa razy tyle, ile jest BX. Wziąwszy linią BE, równą połowie linii CD, to jest 30 złotych; linią EX, musi też być połową linii DY. A że AX, ma być trzy razy tak wielką, jak DY; więc AX, będzie 6 razy tak wielką, jak EX: a zatem AE, będzie w sobie zamykała EX, 5 razy. Ze zaś AE, równa jest summie AB, i BE, to jest summa 30, i 40, czyli 70; więc EX, oznaczać będzie piątą część 70, to jest 14, a zatem BX, oznaczy sumę 30, i 14, to jest 44. AX sumę 40, i 44, to jest 84. CY dwarazy tak wielką, jak BX, będzie oznaczać 88, a DY oznaczy mniej 60 zł: to jest oznaczy 28. - -

*Powtórzenie.*

Maiątek A . . . .	84.
. . . . B . . . .	44.
. . . . C . . . .	88.
. . . . D . . . .	28.

*Algebraicznie.* Małatek B . . . . .  $x$ .  
Małatek A . . . . .  $x + 40$ .  
Małatek C . . . . .  $2x$ .  
Małatek D . . . . .  $2x - 60$ .

Drugie wyrażenie majątku A . . .  $6x - 180$ .

Warunek.  $6x - 180 = x + 40$ .

(Dodawszy 180 po obu stronach)  $6x = x + 220$ .

(Odiawszy  $ix$  po obu stronach)  $5x = 220$ .

(Podzieliwszy przez 5 obie strony)  $ix = 44$ .

*Inszé przykłady. A, má więcej 88 Zł. niż B.*

C, má więcej 99 Zł. niż D.

*A, má 4 razg tylé, il' D.*

C, má 3 razy tylé, ilé' B.

*A, má 70 Zł. więcej niż B.*

C, má 84 Zł. więcej niż . . . . D.

*A, má 5 razy tyle, ile . . . . . D.*

C, má 3razy tylé, ilé B.



35. Zadanie 22. *A*, i *B*, mają razem 84 Zł.  
*C*, ma więcej 14 Zł. niż *D*.  
*A*, ma 3 razy tyle, ile *D*.  
*C*, ma 2 razy tyle, ile *B*.

Ilż ma każda z tych Osób w szczególności?

Fig. 7:

Niech linia *AB*, wyraża sumę majątku *A*, i *B*, to jest Zł. 84, a linia *CD*, niech wyraża różnicę majątku *C*, i *D*, to jest 14 Zł. Niech *AX*, i *BX*, wyrażają majątki *A*, i *B*: niech nakoniec *CY*, *DY*, wyrażają majątki *C*, i *D*. Majątek *A*, powinién być podług zadania trzy razy tak wielki, jak jest majątek *D*: więc też, i *AX*, powinna być trzy tak wielką, jak *DY*: a zatem jeżeli weźmiemy *AE*, trzy razy tyle, ila jest *CD*, będzie *EX*, trzy razy tyle, ila jest *CY*. A że *CY*, ma być dwa razy tak wielką, jak *BX*; więc *EX*, będzie 6 razy tak wielką, jak *BX*: a zatem *EB*, będzie 7 razy tak wielką, jak *BX*. Jest zaś *EB*, równa sumie *AB*, i 3 razy *CD*, to jest 126; więc *BX*, wyrażać będzie siódmą część Zł. 126, to jest 18. Przeto *AX*, wyrazi 84, inni 18, to jest 66. *CY*, 2 razy tak wielką, jak *BX*, wyrazi 36, a *DY*, wyrazi inni 14, to jest wyrazi 22.

Majątek *A* . . . . 66.  
 Majątek *B* . . . . 18.  
 Majątek *C* . . . . 36.  
 Majątek *D* . . . . 22.

*Algebraicznie. Mian:* Majątek *D* . . . .  $x$ .  
 Majątek *C* . . . .  $x + 14$ .  
 Majątek *A* . . . .  $3x$ .  
 Majątek *B* . . . .  $84 - 3x$ .

Drugie wyrażenie majątku *C* . . . .  $168 - 6x$ .

Warunek.  $x + 14 = 168 - 6x$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy  $6x$  po obu stronach)  $7x + 14 = 168$ .  
 (Odiawszy 14 po obu stronach) . . .  $7x = 154$ .  
 (Podzieliwszy przez 7, obie strony)  $x = 22$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 22$ . Majątek D.

$x + 14 = 36$ . Majątek C.

$3x = 66$ . Majątek A.

$84 - 3x = 18$ . Majątek B.

*Sprawdzenie.* 36, to jest majątek C, dwa razy w sobie zamyka 18, to jest majątek B.

*Inszé przykłady.* A, i B, mają razem 220 Zł.

C, má więcej 80 Zł. niż D.

A, má 4 razy tyle, ile D.

C, má 2 razy tyle, ile B.

A, i B, mają razem 144 Zł.

C, má 64 złotych więcej, niż D.

A, má 5 razy tyle, ile D.

C, má 3 razy tyle, ile B.

36. Zadanie 23. A, i B, mają razem 100 Zł.

C, i D, mają także razem 100 Zł.

A, má, 3 razy tyle, ile D.

C, má, 2 razy tyle, ile B.

*Ilż má každá z tych Osób w szczególności,*

*Przez rozumování.* Niech linie rovné AB, CD, wyrażaia dvě summy rovné: prvníá sumu majátku A, i B, druhá sumu majátku C, i D.

Fig. 8.

Niech AX, i BX, wyrażaia majátki szczególné A, i B, a CY, DY, niech wyrażaia majátki szczególné C, i D. Majátek A, má byt 3 razy tak wielki, iak majátek D, więc AX, powinna trzy razy zamykać w sobie DY. Zróbmy AE, trzy razy tylá, ilá iest CD: będzie EX, trzy razy také tak wielká, iak CY: a že CY, má byt 2 razy tylá, ilá iest BX; więc EX, iest 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EB, będzie 5 razy tylá, ilá iest BX. Iest więc linia BX,  $\frac{1}{5}$  linii EB, to iest  $\frac{1}{5}$  Zł. 200: a zatém BX wyrażá Zł. 40.

Majátek B . . . . 40

Majátek A . . . . 60.

Majátek C . . . . 80.

Majátek D . . . . 20.

Algie-



*Algebraicznie. Mianowanie.* Maiątek D . . .  $x$ .  
 Maiątek A . . .  $3x$ .  
 Maiątek B . . .  $100 - 3x$ .  
 Maiątek C . . .  $100 - x$ .  
 albo . . .  $200 - 6x$ .

*Warunek*  $100 - x = 200 - 6x$ ,

*Przerabianie.* (Dodawszy  $6x$  po obu stronach)  $100 + 5x = 200$ .  
 (Odiawszy  $100$  po obu stronach) . . .  $5x = 100$ .  
 (Podzieliwszy przez pięć) . . . . .  $1x = 20$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 20$ . Maiątek D.  
 $3x = 60$ . Maiątek A.  
 $100 - 3x = 40$ . Maiątek B.  
 $200 - 6x = 80$ . Maiątek C.  
 $100 - x = 80$ . Drugie wyrażenie maiątku C.

*Sprawdzenie.* Dwa wyrażenia maiątku C, są równe.

*Inszé przykłady.* A, i B, maia razem Zł. 112.  
 C, i D, maia razem Zł. 126.  
 A, má 5 razy tyle, ile D.  
 C, má 3 razy tyle, ile B.

A, i B, maia razem 117 Zł.  
 C, i D, maia razem 113 Zł.  
 A, má 5 razy tyle, ile D.  
 C, má 3 razy tyle, ile B.

37. Zadanie 24. Dwie Osoby A, i B, maia razem 100 Zł. A, má trzy razy tyle niż 40, ile B, má mniej od 40.

Niech linią AB, wyraża sumę maiątków niewiadomych. AX, Fig. 9. BX, osób A, i B. Niech tak linią AD, iak linią BC, wyraża 40. Linią DX, wyrażać będzie to, co má A, nad 40 Zł. a linią CX, wyrazi to, co má B, mniej od 40: musi zatem być DX, trzy razy tak wielką, iak CX, a CD, dwa razy tak wielką, iak CX. Że zaś CD, wyraża 20; więc CX wyrażać, będzie 10, a zatem AX, wyrazi 70, a BX, 30.

Miaitek A . . . . . 70.

Miaitek B . . . . . 30.

A, má więcý 30, nad 40.

B, má mniéý 10, od 40.

*Algebraicznie. Mian:* To, co má B, mniéý od 40 nazwiemy . .  $x$ .  
 Będzie to, co má A, więcý nad 40 . . .  $3x$ .

Miaitek przeto B . . . . .  $40 - x$ .Miaitek . . . A . . . . .  $40 + 3x$ .Summa miaitek . . . . .  $80 + 2x$ .*Warunek.*  $80 + 2x = 100$ .*Przeróbianie.* (Odiawszy 80 po obu stronach)  $2x = 20$ .(Podzieliwszy przez 2) . . . . .  $1x = 10$ .*Rozwiązanie.*  $x = 10$ . Tylé má B, mniéý od 40. $3x = 30$ . Tylé má A, więcý nad 40. $40 - x = 30$ . Miaitek B. $40 + 3x = 70$ . Miaitek A.

---

 $80 + 2x = 100$ . Summa miaitek.

*Inszé przykłady.* Oyciec wraz z Synem-maig. lát 60. Ténże oyciec  
 má 4 razy tylé więcý nad lát 18, ilé Syn má mniéý od lát 18.

A, i B, maig. razém złotych 1200. A, má 5 razy tylé więcý nad  
 90, ilé B, má ráz więcý nad 90.

38. *Zadanie 25.* Mámi liczbę złożoną ze dwóch znaków: summa tych  
 dwóch znaków osobno wziętych czyni 9. Gdy do téy liczby ze dwóch znaków  
 złożonéý dodám 27, będę miał inną liczbę złożoną z tychże dwóch co i piérwéý  
 znaków, ale w porządku wspacznym. Jakiéž są té dwie liczby?

*Arytmetycznie.* Ponieważ piérwszá liczba, którý szukamy, powin-  
 na byt taká, aby summa dwóch iéý znaków osobno wziętych czynila 9;  
 więc będzie iedną z ośmiu liczb następujących:

18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

Z tych



Z tych ośmiu liczb cztery ostatnie, 81, 72, 63, 54, składają się z tych samych znaków, co i cztery pierwsze, 18, 27, 36, 45, ale w porządku wspacznym. Będzie więc jedna z tych czterech liczb, 18, 27, 36, 45, liczbą pierwszą szukaną. Różnice tych liczb od tamtych, to jest 18, od 81, 27 od 72, 36 od 63, 45 od 54, będą 63, 45, 27, 9. Z tych czterech różnic trzecią tylko, to jest 27, równa się różnicy danej: a zatem liczby 36, i 63, téj różnicy odpowiadające, są liczbami którychśmy szukali.

<i>Algiebr:</i> Mian:	Znak dziesiątków pierwszej liczby szukaney . . .	$x$ .
	Znak jedności téżę liczby . . . . .	$9 - x$ .
	Ważność znaku dziesiątków . . . . .	$10x$ .
	Ważność znaku jedności . . . . .	$9 - x$ .
	Liczba pierwszą szukaną . . . . .	$9x + 9$ .

Znak dziesiątków drugiej liczby szukaney . . .	$9 - x$ .
Znak jedności téżę liczby . . . . .	$x$ .
Ważność znaku dziesiątków drugiej liczby . . .	$90 - 10x$ .
Ważność znaku jedności téżę liczby . . . . .	$x$ .
Liczba drugą szukaną . . . . .	$90 - 9x$ .

A że ta druga liczba, ma być większą 27, od pierwszej; więc drugie ię wyrażenie będzie . . . . .  $9x + 36$ .

*Warunek.*  $9x + 36 = 90 - 9x$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy  $9x$  po obu stronach)  $18x + 36 = 90$ .  
(Odiawszy 36 po obu stronach) . . .  $18x = 54$ .  
(Podzieliwszy przez 18) . . . . .  $1x = 3$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 3$ . Znak dziesiątków pierwszej liczby.  
 $9 - x = 6$ . Znak jedności pierwszej liczby.

Ténże znak 6, iest znakiem dziesiątków drugiej liczby, a 3 znakiem jedności drugiej liczby, tak iak wyżej: a zatem liczby szukané, są 36, i 63.

*Inszé przykłady.* Mam liczbę złożoną ze dwóch znaków, których summa czyni 10: Gdy do téj liczby dodam 36, będę miał inną liczbę złożoną z tychże co i pierwszą, znaków, ale w porządku wspacznym.

*Mam liczbę złożoną ze dwóch znaków, których summa czyni 12. Gdy do téj liczby dodam 18, będę miał inną liczbę złożoną z tychże co i pierwszą, znaków, ale w porządku wspacznym.*

39. *Uwaga.* W każdym z trzech przykładów poprzedzających summa dwóch liczb z jednakowemi znakami, w porządku wspacznym ułożonemi była iednostayną: toiest w przykładzie pierwszym była ta summa 99, w drugim 110, w trzecim 132. Gdyby za drugi warunek daną była ta summa taká, iaką té dwie liczby czynić powinny; tedy tén drugi warunek, byłby zbyteim: bo już był zawarty w pierwszym warunku: gdyby zaś daná była inná iaká summa od pierwszey odmiénná, tedy zadanie byłoby niepodobné do rozwiązania. Ostrzedz to nás powinno, że warunki dané, mają byđz zawsze takie, aby iedné nie były zawiślé od drugich, i w nich się żadną miarą nie zawierały.

40. *Zadanie 26.* *Mam liczbę złożoną ze dwóch znaków, toiest z jedności i z dziesiątków: znak zaś jedności má w sobie więcéj iedną jednością, niż znak dziesiątków. Summa téj liczby, i drugiéj z tychże dwóch znaków złożonéj, ale w porządku wspacznym czyni 55.*

*Arytmetycznie.* Pierwszą liczbą szukaną musi byđz iedną z tych czterech 12, 23, 34, 45.

Liczbę złożoną z tychże dwóch znaków, ale w porządku wspacznym są: 21, 32, 43, 54. Summa tych liczb i pierwszych im odpowiadających iest: 33, 55, 77, 99. A że drugá z tych summ równá iest summie danéj; więc liczby, których szukaliśmy, będą 23, i 32. Jakoż té dwie liczby czynią zadosyć danym warunkóm.

*Algiebr: Mian:* Znak dziesiątków rwszéj liczby szukanéj  $x$ .

Znak iedności . . . . .  $x + 1$ .

Ważność dziesiątków . . . . .  $10x$ .

Ważność iedności . . . . .  $x + 1$ .

Ważność rwszéj liczby . . . . .  $11x + 1$ .

Znak dziesiątków drugiéj liczby . . . . .  $x + 1$ .

Ważność dziesiątków drugiéj liczby . . . . .  $10x + 10$ .

Znak i ważność iedności . . . . .  $x$ .

Ważność drugiéj liczby . . . . .  $11x + 10$ .

Summa pierwszéj i drugiéj liczby . . . . .  $22x + 11$ .

*Warto-*



Warunek.  $22x + 11 = 55$ .

Przerabianie. (Odiawszy 11 po obu stronach)  $22x = 44$ .  
(Podzieliwszy przez 22)  $1x = 2$ .

Rozwiązanie.  $x = 2$ . Znak dziesiątków pierwszej liczby.  
 $x + 1 = 3$ . Znak jedności.

23. Liczba 1wsza szukana.

32. Liczba 2ga w porządku wspacznym.

55. Summa dwóch liczb szukanych.

Inszé przykłady. Mam liczbę złożoną ze dwóch znaków: Znak jedności ma 2 więcej, niż znak dziesiątków. Summa téj liczby, i inszég złozonej z tychże znaków, ale w porządku wspacznym czyni 88.

Mam liczbę, której znak jedności jest większy pięcią, od znaku dziesiątków. Summa téj liczby i inszég złozonej z tychże znaków, ale w porządku wspacznym czyni 121.

41. Uwaga. Gdyby za drugi warunek daną była różnica dwóch liczb, tedy ten drugi warunek, albowy się zgadzał z pierwszym, od którego zawiśł, i byłby zbytnim; albowy się iemu sprzeciwiał, i Zagadnienie byłoby niepodobné do rozwiązania.

42. Zadanie 27. Pewny Kupiec na początku każdego roku wylęcza z kapitału swego co rok na wydatki Zł. 1200: resztę zaś kapitału tak pomyślnie zarabia, że na końcu każdego roku dwoi kapitał pozostały. Przy końcu 3 lat przychodzi do kapitału 5 razy tak wielkiego, iak był ten, który zebrął przed 3 laty.

Jakiż jest kapitał jego?

Arytmetycznie. Gdyby ten Kupiec nic nie wydawał; tedy na końcu 1wszego roku podwoiłby swój kapitał. Na końcu drugiego roku podwoiłby znowu kapitał już podwoiony, który zatem byłby 4 razy tak wielki, iak był przy początku pierwszego roku. Na końcu trzeciego roku byłby podwoiony ten kapitał, który miał na końcu drugiego roku, toieśł, byłby 8 razy tak wielki, iak przy początku 1wszego roku. Gdyby więc ten kupiec nic nie wydawał; tedy na końcu 1wszego, 2go, 3ciego roku, zebrąłby kapitał 2, 4, 8, razy tak wielki, iak był przy początku 1wszego roku. Té

Té zatem 1200 złotych, które przy początku pierwszego roku na wydatki wyłączył, gdyby się przy kapitale zosławały; tedy na końcu trzech lat 8 razyby się pomnożyły, toieft, zamiast tych 1200 Zł. miałby na końcu trzeciego roku 9600. Té 1200 Zł. które przy początku drugiego roku na wydatki wyłączył, byłyby się na końcu trzeciego roku 4 razy pomnożyły, toieft, miałby zamiast nich na końcu 3ciego roku 4800. Té naoslatek 1200 Zł. które przy początku 3ciego roku na wydatki wyłączył, byłyby się na końcu 3ciego roku podwoiły, toieft miałby zamiast nich na końcu 3ciego roku 2400 złotych.

Że więc ten kupiec przez trzy lata co rok z kapitału swęgo wyłączał na wydatki Zł: 1200, dla tego na końcu trzeciego roku kapitał iego powinien bydz mnieyszy tą summą, którą byłby więkfszy, gdyby był nic z swęgo kapitału nie wydawał: toieft, będzie na końcu trzeciego roku kapitał tego kupca mnieyszy summą tych trzech liczb 9600, 4800, 2400, czyli 16800 złotych. Nie dostaie tedy kupcowi tému złotych 16800, aby miał na końcu trzeciego roku 8 razy tylé, ilé miał na początku 1wszego roku. A że na końcu trzeciego roku má tylko 5 razy tylé, ilé miał na początku pierwszego roku; więc nie dostaie mu trzy razy tylé, ilé miał na początku pierwszego roku, aby na końcu trzeciego roku, miał 8 razy tylé, ilé miał na początku pierwszego roku: a zatem 1wszy kapitał iego trzy razy wzięty czyni 16800 złotych: trzecia zaś część złotych 16800, toieft 5600 złotych iest pierwszym iego kapitałem.

1wszy kapitał kupca tego 5600 Zł.

Po 1wszym wydatku . . . 1200.

---

Zostaie mu . . . . 4400.

Na końcu 1wszego roku má . . 8800.

Po drugim wydatku . . . . . 1200.

---

Zostaie mu . . . . . 7600.

Na końcu 2giego roku má . . . . 15200.

Po 3cim wydatku . . . . . 1200.

---

Zostaie mu . . . . 14000.



Na końcu 3ciego roku . . . 28000, to jest 5 razy 5600 Zł.

*Algebraicznie.* Mian: Kapitał i wszy tego kupca . . .  $x$ .

Po pierwszym wydatku 1200 Zł.  $x - 1200$ .

Na końcu 1wszego roku . . .  $2x - 2400$ .

Po drugim wydatku 1200 Zł.  $2x - 3600$ .

Na końcu 2giego roku . . .  $4x - 7200$ .

Po trzecim wydatku 1200 Zł.  $4x - 8400$ .

Na końcu 3ciego roku . . .  $8x - 16800$ .

A że ten kupiec na końcu 3ciego roku má mieć 5 razy tyle, ile miał na początku 1wszego; więc

*Warunek.*  $8x - 16800 = 5x$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy 16800 po obu stronach)  $8x = 5x + 16800$ .

(Odiawszy  $5x$  po obu stronach) . . .  $3x = 16800$ .

(Podzieliwszy przez 3) . . .  $x = 5600$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 5600$ .

Dalsze w rozwiązaniu postępowanie, już w sposobie rozwiązania Arytmetycznym jest wyłożone.

*Inszé przykłady.* Wydatek roczny tego kupca jest 1500 Zł. Na końcu 4 lat, má tyle 10 razy, ile miał na początku.

Wydatek roczny kupca jest 2200 Zł. Na końcu 5 lat má 10 razy tyle, ile miał na początku.

43. Zadanie 28. A, daie dla B, tyle Zł. ile B, już má: B, wzajemnie daie dla A, tyle Zł. ile się u A, pozostało. Po tym wzajemnym dátku, A, i B, mają po 4 Zł. Ileż piérwéy Zł. było u A, a ile u B?

*Arytmetycznie.* A, mieć będzie Zł. 4, dostawszy od B, tyle Zł. ile ich má pozostałych, to jest A, má Zł. 4, po podwoionym przez B, majątku swoim: więc u A, była piérwéy połowa Zł. 4, to jest Zł. 2. B, dawszy dla A, Zł. 2, má pozostałych Zł. 4: więc przed tym dátkiem musiałoby być u B, Zł. 6.

B, mieć będzie 6 Zł. wzięwszy od A, tyle, ile już má: więc przed tym wziętkiem była u B, połowa Zł. 6, to jest 3 Zł: więc wziętek B, od A, jest Zł. 3. Ze zaś A, dąwszy té 3 Zł. má reszty 2 Zł. więc przed tym dátkiem było u A Zł. 5.

Maiątki A.	Maiątki B.
1wszy maiątek . . . . 5 Zł.	1wszy maiątek . . . . 3 Zł.
2gi maiątek po wydanych Zł. 3 . . . . 2.	2gi po wziętych Zł. 3 . . . . 6.
3ci maiątek po wziętych Zł. 2 . . . . 4.	3ci po wydanych Zł. 2 . . . . 4.

*Algebraicznie.* A, i B, mają naostatku po Zł. 4; więc mają razem Zł. 8. A że tylko między niemi były wzajemné dátki; więc i przed temi dátkami znaydowało się u nich Zł. 8.

*Mian:* 1wszy maiątek B . . . .  $x$ . 1wszy maiątek A . . . .  $8 - x$ .  
2gi maiątek B, po wziętku  $2x$ . 2gi maiątek A, po dátku  $8 - 2x$ .  
Maiątek A, po wziętku  $16 - 4x$ .

*Warunek.*  $16 - 4x = 4$ .

*Przerábianie.* (Dodąwszy  $4x$  po obu stronach)  $16 = 4 + 4x$ .  
(Odiąwszy 4 po obu stronach)  $12 = 4x$ .  
(Podzieliwszy przez 4) . . . . .  $3 = x$ .

W dalszém postępowaniu można wziąć miarę z postępowania Arytmetycznego.

*2gi Przykład.* A, dać dla B, dwa razy tylé, ile má B: B, wrócić dla A, dwa razy tylé, ile się zostało u A. Naoskatek tak A, iak i B, mają po Zł. 9.

*Arytmetycznie.* A, mieć będzie 9 Zł. gdy weźmie od B, tylé dwoie, ile już má A: więc przez tén wziętek, maiątek A, jest potroiony, a zatem u A, było przedtém Zł. 3; więc od B, má Zł. 6. B, má Zł. 9, dąwszy dla A, Zł. 6; więc u B, przed daniem złotych 6, było 15 Zł. B, má Zł. 15 wzięwszy od A, tylé dwoie, ile má przed tym wziętkiem; więc má naprzód Zł. 5, a potém bierze Zł. 10. Ze zaś się u A, zostało Zł. 3, dąwszy Zł. 10; więc przed tym dátkiem było u A, Zł. 13.

Maią-



Maiątki A.		Maiątki B.	
1wszy maiątek	13. Zł.	1wszy maiątek	5. Zł.
A, daie	10.	B, bierze	10.
Zostaie się	3.	Więc má	15.
Bierze	6.	Daie	6.
Więc má	9.	Zostaie się	9.

*Algebraicznie.* Naostatku tak A, iak i B, mają po Zł. 9; więc razem mają Zł. 18. A że maiątków ich summa była i przedtem iednakową; więc i przedtem było u nich Zł. 18.

*Mian:* 1wszy maiątek B . . .  $x$ . 1wszy maiątek A . . .  $18 - x$ .  
 po wziętku  $2x$  . . .  $3x$ . Dáwszy  $2x$  . . .  $18 - 3x$ .  
 Wziąłszy  $3x$  —  $6x$ ,  $54 - 9x$ .

*Warunek:*  $54 - 9x = 9$ .

*Przerábianie.* (Dodáwszy  $9x$  po obu stronách)  $54 = 9 + 9x$ .  
 (Odiąłszy  $9$  po obu stronách)  $45 = 9x$ .  
 (Podzieliwszy przez  $9$ ) . . .  $5 = 1x$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 5$ . 1wszy maiątek B.  
 $3x = 15$ . Maiątek B, po wziętych Zł. 10.

$18 - x = 13$ . 1wszy maiątek A.  
 $18 - 3x = 3$ . Maiątek A, po danych Zł. 10.  
 $54 - 9x = 9$ . Maiątek A, po wziętych Zł. 6.

*Inszé przykłady.* A, daie dla B, 3, 4, 5, i t. d. razy tyle, ile má B. B, oddaie dla A, 3, 4, 5, i t. d. razy tyle, ile u A, zastało. Po czém tak A, iak i B, mają w pierwszym razie po Zł. 16, w drugim po Zł. 25, w trzecim po Zł. 36, i t. d.

44 *Uwaga.* W przykładach zadania poprzedzającego, np: w pierwszym, gdybysmy byli szukali wyrażenia powtórnego maiątku B; tedyby trzeba było odjąć ilość  $5 - 2x$  od ilości  $2x$ : w czém ponieważ nieiaka trudność zachodzi; więc działanie to tak objaśniamy.

Gdyby od  $2x$  przyszło odjąć 8; zostałoby  $2x - 8$ . Ale, że zamiast 8 trzeba odejmować 8 mniey  $2x$ ; więc odejmując 8, nadto by się odjęło, i reszta byłaby mnieyszą dwiema  $x$ , niż być powinna: więc do téj reszty  $2x - 8$ , trzeba znowu dodać  $2x$ , aby reszta była taką, iaką być powinna: a zatem  $4x - 8$ , będzie prawdziwą resztą.

Sprawdzenie tego na tém zawisło, aby resztę  $4x - 8$  dodać do ilości  $8 - 2x$ , która się odejmowała: i obaczyć, czyli ta summa uczyni  $2x$ : że zaś tak jest w samej rzeczy; więc się dobrze odjęło.

Podobnie, i w drugim przykładzie, chcąc znaleźć wyrażenie powtórnego majątku B; trzeba było od  $3x$  odjąć  $36 - 6x$ . Gdyby  $36$  przyszło odejmować od  $3x$ ; byłoby reszty  $3x - 36$ : ale że trzeba odejmować  $36$ , zmniejszone szczęściem  $x$ ; więc ta reszta byłaby mnieyszą szczęściem  $x$ , niż być powinna. Trzeba więc do niej dodać té  $6x$ , a dopiero reszta  $9x - 36$ , będzie resztą prawdziwą.

Takie rozumowanie uczyniwszy, ustanowimy Mianowania w przykładach następujących, w których sposób postępowania Arytmetyczny nie różni się od Algiebraicznego.

A, daie dla B, tyle Zi. ile ich má B.

B, daie dla A, tyle Zi. ile się u A zostało.

A, znowu daie dla B, tyle Zi. ile się u B, zostało.

B, znowu daie dla A, tyle Zi. ile się u A, zostało.

Po tych wzajemnych dwojakich dátkach, tak A, iak i B, mieć będą po Zi. 16.

Mianowanie. IwŹy majątek B . . . . .  $36$ ,  
IwŹy majątek A . . . . .  $32 - x$ ,  
B, wziąwszy  $x$ , od A, má . . . . .  $2x$ ,  
A, dąwszy  $x$ , dla B, má . . . . .  $32 - 2x$ ,  
B, dąwszy  $32 - 2x$ , dla A, má . . . . .  $4x - 32$ ,  
A, wziąwszy  $32 - 2x$ , od B, má . . . . .  $64 - 4x$ ,  
B, wziąwszy  $4x - 32$ , od A, má . . . . .  $8x - 64$ ,  
A, dąwszy  $4x - 32$ , dla B, má . . . . .  $96 - 8x$ ,  
B, dąwszy  $96 - 8x$ , dla A, má . . . . .  $16x - 160$ ,  
A, wziąwszy  $96 - 8x$ , od B, má . . . . .  $192 - 16x$ .

Warunek.  $16x - 160 = 16$ .

Prze.



*Przerobienie.* (Dodawszy 160 po obu stronach)  $16x = 176$ .  
(Podzieliwszy przez 16) . . . . .  $x = 11$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 11$ . Pierwszy majątek B.  
 $32 - x = 21$ . Pierwszy majątek A.  
 $2x = 22$ . Majątek B, wziąwszy 11.  
 $32 - 2x = 10$ . Majątek A, dawszy 11.  
 $4x - 32 = 12$ . Majątek B, dawszy 10.  
 $64 - 4x = 20$ . Majątek A, wziąwszy 10.  
 $8x - 64 = 24$ . Majątek B, wziąwszy 12.  
 $96 - 8x = 8$ . Majątek A, dawszy 12.  
 $16x - 160 = 16$ . Majątek B, dawszy 8.  
 $192 - 16x = 16$ . Majątek A, wziąwszy 8.

*Inszé przykłady.* A, i B, czynią podobné jak wyżej zamiany 3, 4, 5, i t. d. razy, i mają naostatek w pierwszym razie po Zł. 64, w drugim po 256, w trzecim po 1024 i t. d.

45. Wprawiwszy Uczniów przez wiele szczególnych odeymowania przykładów, wnieśmy z rozumowania czynionego na każdym z tych przykładów, regułę ogólną odeymowania, na tém się zasadzającą, aby odmięniać znaki przed wyrazami ilości odeymować się mającý: to jest + na — a zaś — na + i potem dodawać. O téj jednak ostatniéj odmianie, wtedy tylko przyzwolicie będzie się mówiło; gdy w ilości odeymować się mającý znáydownać się będą wyrazy, z poprzedzającym znakiem odeymowania —.

1mo. . . . . Od  $8x$ .  
trzeba odjąć .  $5x + 3$ .

Zostanie . . .  $3x - 3$ .

2do. . . . . Od . . .  $10x + 15$ .  
trzeba odjąć . . .  $5x + 7$ .

Zostanie . . . . .  $5x + 8$ .

3tio. . . . . Od . . .  $12x + 5$ .  
trzeba odjąć . . .  $5x - 3$ .

Zamieńmy to działanie, na dodawanie, odmieniwszy znaki, w ilości odeymować się mającéy: to jest do  $12x + 5$ .

dodamy  $- 5x + 3$ .

---

Summa . . .  $7x + 8$ .

Ta summa jest w samey rzeczy resztą, gdy od  $12x + 5$ , odeymie-  
my  $5x - 3$ .

Jakoż dodanie dwóch ilości mających przed sobą znaki przeciwné  $+ i -$ ,  
jest to iedno, co odeymowanie ich iednéy od drugiéy bez względu na znaki:  
tak np: iedno jest, dodać  $+ 8$  do  $- 3$ , co jest odjąć 3 od 8: bo tak ta  
summa, iak i ta reszta, będzie 5.

Trzeba ieszcze przytoczyć więcéy przykładów odeymowania, takich  
zwłászcza, gdzieby ilość odeymować się mającą zawierała wyrazy ze znakami  
odmiennémi.

Od . . .  $12x - 15$ .

Odeymuję . . .  $5x - 12$ .

---

Zostanie . . .  $7x - 3$ .

Od . . .  $18x - 32$ .

Odeymuję . . .  $40 - 7x$ .

---

Zostanie . . .  $25x - 72$ .

Od . . .  $7x - 8$ .

Odeymuję . . .  $15 - 5x$ .

---

Zostanie . . .  $12x - 23$ .

Aby to lepiej objaśnić, położmy liczby zwyczajné zamiast Algiebrai-  
cznych wyrażeń.

I tak niech w piérwzym z poprzedzających przykładzie będzie  $x = 4$ ,  
a zatém

$$12x - 15 = 33.$$

$$5x - 12 = 8.$$

Różnica 8 od 33, jest 25: przeto i różnica  $5x - 12$  od  $12x - 15$ ,  
to jest  $7x - 3$  powinna być 25. Jakoż położywszy 4 zamiast  $x$ , w tém wyra-  
żeniu  $7x - 3$  będzie  $7x - 3 = 25$ .



46. Można tu wzmiankę uczynić, o różnicy między ilościami, *przydaynymi*, i *ujemnymi*, (*quantitates positivæ, & negativæ*) która to różnica nie inaczej się bierze, tylko względem na ten cel, w którym sobie wystawuujemy te ilości. Jeżeli je sobie wystawuujemy *oddzielnie*, (*abstracte*) to jest, nie przywiązując do nich żadnego znaczenia rzeczy; tedy w tym względzie, bierzemy za *przydayne* te ilości, które przed sobą mają znak dodawania, i które uważamy jako powiększające tę ilość, do której je dodajemy: a za *ujemne* bierzemy te ilości, które mają przed sobą znak odejmowania, czyli które uważamy, jako zmniejszające tę ilość, do której je dodajemy.

Wystawując sobie majątek osoby iakię, iak ilość przydayną, uważamy długi teyże osoby, iak ilość ujemną, przez wzgląd, iż te długi zmniejszają tey osoby majątek: i jedno jest w Matematyce powiedzieć, że kto winien złoty, albo że on ma w tym względzie mniej złotym. Ale gdyby pierwszym zamiarem naszym było obrachować długi iakię osoby, gdyby dopiero, stan tych długów ułożywszy, doszliśmy potem, że ta osoba ma jeszcze 1000 naprzykład Zł. tedy te tyśiąc Zł. które ma ta osoba, postawione naprzeciw temu tyśiącu Zł. które winna; zgladziłyby ten ostatni dług: i w tym względzie jednoby było powiedzieć, że ta osoba ma tyśiąc złotych, albo, że winna mniej 1000 Zł.

Tak też, jeżeli pierwszym zamiarem podróznego jest, aby się dostał na pewne miejsce, a jeżeli się oddala od swojej drogi tak dalece, iż znowu powraca się na miejsce, z którego wyszedł; tedy kroki jego przy zwrocie uczynione, gubią te kroki, któreby był uczynił, dla zbliżenia się ku miejscu zamierzonemu: i wystawując sobie te ostatnie kroki, iak przydayne, pierwsze się uważają iak ujemne. Gdyby kto chcąc do Wiednia zajechać, brął się z Warszawy drogą do Petersburga, i potem postrzegł swój błąd; tedyby zwrotnym przeciwnym powinién zgladzić tę ilość drogi, którą się był oddalił od Wiednia, zamiast co się miał do niego przybliżyć. Ale, gdyby było pierwszym jego zamiarem, dostać się do Petersburga: tedy, ponieważ ta sama droga przez niego przejechana, ku Petersburgowi prowadząca, czyniłaby zadosyć pierwszemu jego zamiarowi; uważalibyśmy ją iako ilość przydayną.

Wystawując sobie dół iakię kamienicy, nakształt punktu, od którego rachować mamy wstępy na górę, lub zstępy *np.* do piwnic; można nazwać te zstępy, wstępiami ujemnymi. I lubo w rozmowie zwyczajney śmiesznieby się wydawało, gdyby kto tak mówił, piętro *mniey* jednem, piętro *mniey* dwoma, i t. d. (zszedłszy z dołu kamienicy wgląbsz do piwnic na piętro pierwsze, drugie, i t. d.) atoli jednak Matematyk używá tych wyrażení w rachunkach

kach swoich: bo sposoby té tłumaczenia się oznaczają náywyraźniéy przeciwność położenia miéysc, o które rzecz idzie.

Trzeba sobie wystawiać ilości przydayné, i niémné, pod tym widokiem względu i przeciwności, abyśmy zrozumieć mogli znaczenie wyrażeń tych, do których czasem przychodzi się w rozwiązaniach Zagadnień: bo inaczéy zdawałoby się, iż rozwiązania té na Zadanie nie odpowiadają.

*Przykład 1.*  $A$ , i  $B$ , mają razem  $Zł. 4$ .  
 $A$ , i  $C$ , mają  $Zł. 6$ .  
 $B$ , i  $C$ , mają  $Zł. 12$ .

*Jakiż jest majątek każdy z tych osób w szczególności?*

*Arytmetycznie.* Summa tych trzech majątków dwa razy wzięta jest  $22. Zł.$   
 raz wzięta  $11.$

$A$  że  $B$ , i  $C$ , mają razem  $12 Zł.$  więc przydanie majątku  $A$ , do summy majątków  $B$ , i  $C$ , zmniejszy tę summę jednym  $Zł.$  a zatem osoba  $A$ , zamiast coby miała mieć złotych jedén, winna jest téń  $Zł. 1$ , czyli má mniéy  $Zł. 1$  jednym.

Aby majątek  $A$ , był przydayny, tak trzeba było to Zadanie wyłożyć:  $B$ , i  $C$ , mają razem  $Zł. 12$ , gdy zaś od majątku  $B$ , i  $C$ , osobno wziętego odeymiemy majątek  $A$ , reszty będą  $4 Zł.$  i  $6 Zł.$

*Algebraicznie. Mianowanie.* Majątek  $A \dots x$   
 Majątek  $B \dots 6+x$   
 Majątek  $C \dots 8+x$   
 Summa majątków  $B$ , i  $C \dots 14+2x$

*Warunek.*  $14 + 2x = 12$ .

*Przerabianie.* (Odiąwszy  $14$  po obu stronach)  $2x = -2$   
 (Podzieliwszy przez  $2$ )  $x = -1$ .

*Rozwiązanie.*  $x = -1$ : Majątek  $A$ .  
 $6 + x = 5$ . Majątek  $B$ .  
 $8 + x = 7$ . Majątek  $C$ .

*Przykład*



*Przykład 2.*  $A$ , i  $B$ , mają razem 23 Zł.  
 $C$ , i  $D$ ; mają razem 6. Zł.  
 $A$ , ma trzy razy tyle, ile  $C$ .  
 $D$ , ma 2 razy tyle, ile  $B$ .

*Ilż ma każda z tych osób w szczególności?*

Doydziemy natychmiast przez rozumowanie, że majątki tych osób, nie mogą być wszystkie przydatne. Jakoż, ponieważ summa majątków  $A$ , i  $B$ , jest więcej niż trzy razy tyle, ila jest summa majątków  $C$ , i  $D$ ; więc jeżeli  $A$ , ma trzy razy tyle, ile  $C$ , więc i majątek  $B$ , powinienby być trzy razy tak wielki, iak majątek  $D$ : a że przeciwnie  $D$ , ma więcej niż  $B$ , bo ma 2 razy tyle, ile  $B$ ; więc majątki tych czterech osób, nie mogą być wszystkie przydatne.

Niech linia  $AB$ , wyraża 23, to jest summe majątków  $A$ , i  $B$ .

Niech druga linia  $CD$ , wvraża 6, to jest summe majątków  $C$ , i  $D$ . Fig. 10.

Niech punkt  $X$ , zamiast być wziętym na linii  $AB$ , między  $A$ , i  $B$ , będzie wzięty z strony przeciwny, to jest na przedłużeniu linii  $AB$ : weźmy podobnie i punkt  $Y$ , na przedłużeniu linii  $CD$ . Niech na linii  $AB$ , będzie wzięta  $AE$ , trzy razy tak wielką, iak  $CD$ .

Jeżeli majątki  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , są wyrażone przez linie  $AX$ ,  $BX$ ,  $CY$ ,  $DY$ ; więc  $AX$ , powinna być 3 razy tak wielką, iak  $CY$ : a że  $AE$ , jest 3 razy tak wielką iak  $CD$ ; więc i  $EX$ , powinna też być trzy razy tak wielką iak  $DY$ . Że zaś  $DY$ , ma być 2 razy tak wielką, iak  $BX$ , więc  $EX$ , musi być 6 razy tak wielką, iak  $BX$ : a zatem  $EB$ , będzie 5 razy tak wielką, iak  $BX$ . A że  $EB$ , wyraża różnicę między 23, i 18, to jest 5, więc  $BX$ , wyrażać będzie piątą część pięciu, to jest 1: a  $DY$  wyrazi 2.

Dwa tedy pierwsze warunki zagadnienia, tak powinny być być wyłożone:

$A$ , ma 23 Zł. więcej niż  $B$ :  $C$ , ma 6 Zł. więcej niż  $D$ .

*Algebraicznie.* Majątek  $B$  . . . . .  $x$ .  
 Majątek  $A$  . . . . .  $23 - x$ .  
 Majątek  $D$  . . . . .  $2x$ .  
 Majątek  $C$  . . . . .  $6 - 2x$ .

Drugie wyrażenie majątku  $A$  . . . . .  $18 - 6x$ .

Warunek  $23 - x = 18 - 6x$ .

G

Prze.

*Przerabianie.* (Dodawszy  $6x$  po obu stronach)  $23 + 5x = 18$ .  
 (Odiawszy  $18$  po obu stronach)  $5 + 5x = 0$ .  
 (Odiawszy  $5$  po obu stronach)  $5x = -5$ .  
 (Podzieliwszy przez  $5$ )  $x = -1$ .

*Rozwiązanie.*  $x = -1$ . Maiątek B.  
 $23 - x = 24$ . Maiątek A.  
 $2x = 2$ . Maiątek D.  
 $6 - 2x = 8$ . Maiątek C.

47. Zadanie 29. Maiątki sześciu osób: A, B, C, D, E, F, są takie, że

Summa maiątków A, i B, jest . . . . . 100. Zł.  
 . . . . . C, i D, . . . . . 100.  
 . . . . . E, i F, . . . . . 100.

A, ma 2 razy tyle, ile C.  
 E, ma 3 razy tyle, ile B.  
 D, ma 4 razy tyle, ile F.

Jakież jest maiątek w szczególności, każdej z tych osób.

Fig. 11.

*Przez rozumowanie.* Niech linie równe AB, CD, EF, wyrażają summy dane 100 Zł. Niech linie AX, BX, wyrażają maiątki A, i B. Linie CY, DY, maiątki C i D. Linie EZ, FZ, maiątki E, i F. Linia AX, powinna być 2 razy tak wielką, jak CY. Weźmy linię AG 2 razy tak wielką, jak CD: będzie GX dwa razy tak wielką, jak DY. A że DY, ma być 4 razy tak wielką, jak FZ; więc GX, będzie 8 razy tak wielką, jak FZ. Zrobmy GH, 8 razy tak wielką, jak EF: będzie też HX, 8 razy tak wielką, jak EZ: A że EZ, ma być 3 razy tak wielką, jak BX; więc HX, będzie 24 razy tak wielką, jak BX, a HB, będzie 25 razy tak wielką, jak BX. Że zaś HB, wyraża 700, a dwudziestą piątą część siedmiuset jest 28; więc BX, czyli maiątek B, jest 28 Zł: a zatem AX, czyli maiątek A, będzie 72 Zł.

Maiątki A . . . . . 72. Zł.  
 B . . . . . 28.  
 C . . . . . 36.  
 D . . . . . 64.  
 E . . . . . 84.  
 F . . . . . 16.



*Algebraicznie, Mianowanie.* Maiątki B . . . . .  $x$ .

A . . . . .	$100 - x$ .
E . . . . .	$3x$ .
F . . . . .	$100 - 3x$ .
D . . . . .	$400 - 12x$ .
C . . . . .	$12x - 300$ (to jest re-

szta odjąwszy  $400 - 12x$  od  $100$ )

Drugie wyrażenie majątku A . . . . .  $24x - 600$ .

*Warunek.*  $24x - 600 = 100 - x$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy  $600$  po obu stronach)  $24x = 700 - x$ .  
 (Dodawszy  $x$  po obu stronach)  $25x = 700$ .  
 (Podzieliwszy przez  $25$ ) . . . . .  $1x = 28$ .

Reszta rozwiązania zawiera się już w postępowaniu przez rozumowanie.

*Inszé przykłady.* Maiątki 6 osób A, B, C, D, E, F, są takie, że,  
 A, i B, mają razem 61. Zł.  
 C, i D, . . . . . 61.  
 E, i F, . . . . . 61.

A, má 3 razy tyle, ile C.  
 E, . . . 4 . . . . . B.  
 D, . . . 5 . . . . . F.

*Maiątki 8 Osób A, B, C, D, E, F, G, H, są takie, że*  
 A, i B, mają razem 119. Zł.  
 C, i D, . . . . . 119.  
 E, i F, . . . . . 119.  
 G, i H, . . . . . 119.

A, má 2 razy tyle, ile C.  
 E, . . . 3 . . . . . B.  
 D, . . . 4 . . . . . G.  
 H, . . . 5 . . . . . F.

48. Zadanie 30. Pewnà osoba kupiła 20 łokci materiji dwoiakiego gatunku, jednego gatunku łokieć po Zł. 14, drugiego po Zł. 12. Płaci zań za wszystko Zł. 258.

*Il'ëz łokci kùpuie z pi'ërszëgo, a il' z drugi'ëgo gatunku?*

*Arytmetyczne.* Gdyby ta osoba samęj piérwśzý materyi kupiła łokci 20; tedyby za nie zapłacić powinna Zł. 280: ale że zapłaciła tylko 258 Zł. toieśt mniéj 22 Zł. więc różnica 22 Zł. pokazuje nám, że i tańszéj dwoma Zł. materyi kupiła ta osoba. Tylé zaś łokci téj tańszéj materyi kupić musiała; ilé razy 2 znajduie się we 22. 2 we 22 znajduie się razy 11: więc 11 łokci kupiła po 12 Zł; a zatém 9 łokci po 14 Zł.

Liczba łokci po	12 Zi.	.	.	.	.	.	.	II.
"	14 Zi.	.	.	.	.	.	.	9.
<hr/>								
Summa łokci	.	.	.	.	.	.	.	20.

Zaplata za lokci 11, po 12 Zl.	132. Zl.
9 . . 14 Zl.	126.
<b>Čaká zaplata . . . .</b>	<b>258.</b>

<i>Algebraicznie. Mianowanie.</i> Liczba łokci po Zł.	14	$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x.$
	12	$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 20 - x.$
Płaca za wszystkie łokcie po Zł.	14	$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 14x.$
	12	$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 240 - 12x.$
		<hr/>
		Cała zapłata $\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 240 + 2x.$

Warunek.  $240 + 2x = 258$ .

*Przerabianie.* (Odiawszy 240 po obu stronach)  $2x = 18$ ,  
(Podzieliwszy przez 2) . . . . .  $x = 9$ .

Rozwiązanie  $x = 9$ . Liczba łokci po Zł. 14.  
 $20 - x = 11$ . Liczba łokci po Zł. 12.  
 $14x = 126$ . Zł. Płaca za łokci 9 po 14 Zł.  
 $240 - 12x = 132$ . Zł. Płaca za łokci 11 po 12 Zł.  


---

 $240 + 2x = 258$ . Cała zapłata za łokci 20.

*Inszé przykłady.* Pewną osobą, używając 36 robotników: jednym płaci na dzień po gr. 18, drugim po gr. 15. Wszystkim zaś razem płaci na dzień gr. 576. Ileż było robotników naigtych na gr. 18, a ile na gr. 15?

Niech znowu będzie liczba robotników 54, z których jedni biorą po gr. 20, a drudzy po gr. 17: a wszyscy razem biorą na dzień gr. 984. (Zapytanie to samo, co wyżej.)

49. Zadanie 31. Najmnie kto robotnika na 48 dni: płaci mu za każdy dzień, w który robi gr. 24, a wytrąca mu za stół w każdy dzień, w którym nie robi gr. 12. Na końcu dni 48, płaci mu wszystkiego gr. 504. Ileż dni było roboty, a ile próżnowania tego robotnika?

Gdyby ten naigty człowiek był robił co dzień przez 48 dni; tedy na końcu byłby wziął gr. 1152: a że tylko odebrał gr. 504; więc nie robił codziennie, i dla tego mniej bierze 648 groszami.

Za każdy dzień, w który nie robi mniej bierze 36 groszami, niżby mu się należało, gdyby był robił: więc cała różnica 648 grószy pochodzi z wytrąconych 36 gr. tyle razy, ile dni ten robotnik próżnował. Jeżeli tedy 648 podzielimy przez 36, wieloraz pokaże liczbę dni przez które próżnował. Ten wieloraz jest 18: więc 18 dni próżnował, a zatem 30 dni pracował.

Dni roboty . . . . .	30.
Dni próżnowania . . . . .	18.
Nagroda za 30 dni pracy . . . . .	720 gr.
Wytrącenie za 18 dni próżnowania . . . . .	216.

Zapłata z wytrąceniem . . 504.

<i>Algebraicznie. Mianowanie.</i> Dni próżnowania . . . . .	$x$ .
Dni roboty . . . . .	$48 - x$ .
Nagroda za dni roboty . . . . .	$1152 - 24x$ .
Wytrącenie za dni próżnowania . . . . .	$12x$ .
Reszta do wypłacenia . . . . .	$1152 - 36x$ .

Warunek:  $1152 - 36x = 504$ .



Przerób: (Dodawszy  $36x$  po obu stronach)  $152 = 36x + 504$ ,  
 (Odiawszy  $504$  po obu stronach)  $648 = 36x$ .  
 (Podzieliwszy przez  $36$ ) . . .  $1x = 18$ .

Reszta rozwiązań zawiera się w postępowaniu Arytmetycznym.

Inne przykłady. Pewny rzemieślnik w każdy dzień w który robi prócz wydatku ochrania sobie gr. 25: w każdy zaś dzień, w który nie robi wydatku gr. 15. W 64 dniach ochronił sobie gr. 640. Ileż dni przez ten czas przeciąg, robił, a ile nie robił?

600 Łokci materji dwoiakiego gatunku jest u dwóch kupców: u jednego łokieć po 24 Zł. u drugiego po 16 Zł. Mienną się, i drugi dodaie pierwszemu Zł. 440. Ileż łokci miał pierwszy kupiec, ile drugi?

50.- Zadanie 32. Najmnie kto pewną liczbę robotników, mężczyzn i kobiet. Jest mężczyzn 12 więcej niż kobiet. Każdy mężczyzna bierze po gr. 18, a kobieta po gr. 15. Wszystkim zaś razem daie się gr. 810. Ileż jest mężczyzn, ile kobiet?

Arytmetycznie. 12 Mężczyzn bierze razem 216 gr. i zostaje się od 810 gr. 594 groszy. Te 594 gr. mają być podzielone między tylé kobiet, co i mężczyzn: kobieta jedna z jednym mężczyzną biorą razem 33 gr: więc tylé będzie par kobiet, i mężczyzn, ile wypadnie z podzielenia 594 przez 33: wypadá zaś 18, więc oprócz 12 mężczyzn, było jeszcze 18 par mężczyzn z kobietami: a zatem było kobiet 18.

Liczba kobiet	. . . . .	18.
Liczba mężczyzn	. . . . .	30.
Płaca kobiet	. . . . .	270. gr.
Płaca mężczyzn	. . . . .	540. gr.

Całą zapłata . . . 810. gr.

Algebraicznie. Mianowanie. Liczba kobiet . . . .  $x$ .  
 Liczba mężczyzn . . . .  $x + 12$ .  
 Płaca kobiet . . . .  $15x$ .  
 Płaca mężczyzn . . .  $18x + 216$ .  
 Całą zapłata . . . .  $33x + 216$ .

Warunek.

Warunek.  $33x + 216 = 810$ .

Przerabianie. (Odiąwszy 216 po obu stronach)  $33x = 594$ .  
(Podzieliwszy przez 33)  $x = 18$ .

Rozwiązanie.  $x = 18$ . Liczba kobiet.  
Reszta iak wyżej.

Inszé przykłady. Kupiono pewną liczbę łokci sukna po Zł. 14, i in-  
szego sukna po Zł. 16 więcej 15 łokci niż pierwszego. Dano za wszystko Zł. 750.

Má kto więcej 30 sztuk w czerwonych Zł. niż w rublach: rachnie jo-  
bie czerwony Zł. po Zł. 18, a rubel po Zł. 7: co wszystko czyni mu Zł. 865.  
Ileż mł czerwonych złotych, ile rubli?

51. Zadanie 33. Kupuje kto pewną liczbę łokci sukna po Zł. 17, a 8  
łokci więcej nad pierwszé, drugiego sukna po Zł. 25. Płaci za tę drugą sztu-  
kę Zł. 392 więcej, niż za pierwszą.

Arytmetycznie. Gdyby tego drugiego gatunku kupiono łokci 8, nie  
kupując nic z gatunku pierwszego; tedyby 200 Zł. dano więcej za gatunek  
drugi, niż za pierwszy: toieł, danoby w saméy rzeczy 200 Zł. za gatunek  
drugi, a nic za pierwszy. A że oprócz tych 8 łokci gatunku drugiego, ku-  
puie się nad to równá liczba łokci z obudwóch gatunków, i w téy równéy  
liczbie łokci, więcej się płaci (oprócz tamtych 200 Zł.) Zł. 192 za gatu-  
nek drugi niż pierwszy, z przyczyny, że każdy łokieć gatunku drugiego, płá-  
ci się 8 Zł. drożey, niż łokieć gatunku pierwszego; więc podzieliwszy 192  
przez 8 wieloráz 24, pokaże liczbę łokci gatunku pierwszego, którego łó-  
kieć płaci się tylko po Zł. 17.

Jest tedy po Zł. 17 . . . . . łokci 24.

po Zł. 25 . . . . . 32.

Płaca za 32 łokcie po Zł. 25 . . . . . 800 Zł.

. . . . . 24 . . . . . 17 . . . . . 408.

Różnica płacy . . . 392.

Algebraicznie. Mian: Liczba łokci sukna po Zł. 17 . . . . .  $x$ .

. . . . . 25 . . . . .  $x + 8$ .

Płaca za drugi gatunek . . . . .  $25x + 200$ .

. . . za pierwszy . . . . .  $17x$ .

Różnica . . . . .  $8x + 200$ .

W aru-

*Warunek.*  $8x + 200 = 392.$

*Przerób:* (Odiawczy 200 po obu stronach)  $8x = 192$ .  
(Podzieliwszy przez 8)  $ix = 24$ .

**Rozwiązanie.**  $x = 24$ . Liczba łokci po Zł. 17.  
Reszta jak wyżej.

*Inszé przykłady. Najmnie kto pierwszą liczbę robotników po gr. 15, ma ich zaś 12 więcej, których zgodził po gr. 24. Tym drugim płaci na dzień gr. 729. więcej, niż pierwszym.*

Najmniej kto pewną liczbę robotników po gr. 20, a 16 więcey, których zgodził po gr. 15: wydać co dzień 80 gr. więcey na pierwszych, niż na drugich.

Najmniej kto pewną liczbę robotników po gr. 24, a 20 więcej, których zgodził po gr. 20. Wydaie co dzień na drugich więcej 160 gr. niż na pierwszych.

52. Zadanie 34. Kupuje kto 32 łokci materji, dwoiakiego gatunku, po 16, i po 12 Zł. Za pierwszy gatunek płaci 176 Zł. więcej, niż za drugi: ile łokci bierze z każdego gatunku?

*Arytmetycznie.* Gdyby się wzięło 32 łokci pierwszész tylko materyi, tedyby za nią zapłacić przypadało Zł. 512, to jest więcéyby się za tę materyą płaciło 512 Zł. niż za drugą, któraby się wcale nie kupowała. A gdy się obadwa gatunki kupią, różnica płacy jest tylko 176 Zł: która to różnica, mnieyszą jest od pierwszész 336 złotemi.

Za każdym łokciem z drugiego gatunku kupionym na mieysce piérwszego zapłata za piérwszy gatunek zmniéyszą się 16 Zł. a zapłata za drugi gatunek powiékszą się 12 złotemi: a zatem różnica tych dwóch summ zmniéyszą się za każdym łokciem kupionym z drugiego gatunku 28 Zł: więc różnica cała 336 Zł. pochodzi z liczby 28 powtórzonych tylé razy, ilé było łokci drugiego gatunku. Znajdziemy tedy tę liczbę łokci drugiego gatunku, podzieliwszy 336, przez 28. Wieloraz będzie 12.

Liczba łokci 2-giego gatunku	12.
pierwszego	20.

## Zapłata



Zapłata za pierwszy gatunek . . . . . 320 Zł.  
za drugi . . . . . 144.

Różnica . . . . . 176.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Liczba łokci po Zł. 16 : . . x.  
po Zł. 12 . 32 = x.

Zapłata za pierwszą liczbę łokci . . . . . 16x.

Zapłata za drugą liczbę łokci . . . . . 384 — 12x.

Różnica płacy . . 28x — 384.

*Warunek.* 28x — 384 = 176.

*Przerób:* (Dodawszy 384 po obu stronach) 28x = 560.  
(Podzieliwszy przez 28) . . . . . 1x = 20.

*Rozwiązanie.* x = 20.

Reszta iak wyżej.

*Inszé przykłady.* Kupuie kto 60 łokci, częścią po 28, a częścią po 24 Zł: płaci drugą ceną 608 złotych więcej niż pierwszą.

Kupuie kto 48 łokci, częścią po 32 Zł. a częścią po 27 Zł. Płaci pierwszą ceną więcej 297 Zł. niż drugą.

53. Zadanie 35. Ogrodnik posadził pewną liczbę drzewek w kwadrat pełny, i zostało mu drzewek 8. Chciałby jeszcze posadzić iedno drzewko w każdym rzędzie, i przydadz rząd ieden dla zachowania kwadratu, ale mu nie dostaie do tego drzewek 11. Ilż było drzewek w każdym rzędzie, ilż rzędów, i ilż wszystkich drzewek?

*Arytmetycznie.* Kładąc następnie iedną, potem 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. kropek na każdy bok kwadratu, liczba kropek 1, 4, 9, 16, 25, 36, Fig. 12. i t. d. kwadraty pełne czyniących ukazuje liczby takowż drzewek, któreby kwadraty napełnić mogły. Każdy kwadrat następny (iak figura, i iey ubieżnie pokazuje) má więcej kropek od kwadratu poprzedzającego, tylé dwóie, ilé ich má bok tegoż kwadratu poprzedzającego, i nad to ieszcze iedną kropkę. Tak naprzykład kwadrat, w którego boku są 3 kropki, będzie miał w sobie kropek 9, a kwadrat następny, w którego boku iest 4 kropek, będzie miał kropek 16, toiest 7 więcej od kwadratu poprzedzającego.

go: a 7 zawiera w sobie 2 razy 3, i nad to jeszcze jedność. Ponieważ tedy po ułożonym pierwszym kwadracie zostało ogrodnikowi drzewek 8, a braknie mu jeszcze drzewek 11 do następного kwadratu, więc gdyby miał 19 drzewek, mógłby ten drugi kwadrat ułożyć: a zatem 19 jest liczba drzewek dwa razy tak wielką, jak liczba drzewek w rzędzie jednym pierwszym kwadratu, i nad to jeszcze zawiera w sobie jedność. Liczba więc dwa razy zamykająca liczbę drzewek, w każdym rzędzie pierwszego kwadratu, jest 18: a przeto liczba drzewek w jednym z tych rzędów była 9.

### I. Ułożenie.

Liczba drzewek w każdym rzędzie . . . . .	9.
Liczba rzędów . . . . .	9.
Liczba drzewek posadzonych . . . . .	81.
Liczba drzewek pozostałych . . . . .	8.
Liczba drzewek wszystkich . . . . .	89.

### II. Ułożenie.

Liczba drzewek w każdym rzędzie . . . . .	10.
Liczba rzędów . . . . .	10.
Liczba drzewek potrzebnych do tego ułożenia . . . . .	100.
Liczba drzewek brakujących . . . . .	11.
Liczba drzewek wszystkich . . . . .	89.

### Algiebraicznie. I. Ułożenie.

Mianowanie.	Liczba drzewek w każdym rzędzie . . . . .	$x$ .
	Liczba rzędów . . . . .	$x$ .

Liczba drzewek wszystkich posadzonych wyrażoną będzie, gdy liczbę drzewek w każdym rzędzie rozmnożymy przez liczbę rzędów: to jest gdy  $x$ , rozmnożymy przez  $x$ , czyli gdy  $x$ , weźmiemy razy  $x$ : co by się tak powinno wyrazić,  $x \times x$ . Zgodzono się jednak, aby opuszczać znak rozmnożenia, i oznaczać to rozmnożenie, kładąc jedną literę przy drugiej, tak jak niżej:

Liczba drzewek wypełniających i wzięte ułożenie . . . . .	$xx$ .
Liczba drzewek wszystkich . . . . .	$xx + 8$ .

### II. Uło.

## II. Ułożenie.

Liczba drzewek w każdym rzędzie . .  $x + 1$ .

Liczba rzędów . . . . .  $x + 1$ .

Liczbę drzewek któreby wypełniły 2gie ułożenie, wyrazimy rozmnożywszy  $x + 1$ , przez  $x + 1$ . Wykonamy zaś to rozmnożenie mnożąc najprzód  $x + 1$ , przez  $x$ , skąd będzie  $xx + 1x$ : mnożąc potem  $x + 1$  przez  $1$ , skąd będzie  $1x + 1$ : a dodawłszy  $xx + 1x$  do  $1x + 1$ , będzie  $xx + 2x + 1$ .

Liczba więc drzewek, któreby wypełniły drugie ułożenie jest . . .

. . . . .  $xx + 2x + 1$ .

Liczba zatem drzewek ogrodnika będzie odiawłszy  $11$  . .  $xx + 2x - 10$ .

Warun:  $xx + 2x - 10 = xx + 8$ .

(Odiawłszy  $xx$  po obu stronach)  $2x - 10 = 8$ .

(Dodawłszy  $10$  po obu stronach) . .  $2x = 18$ .

(Podzieliwłszy przez  $2$ ) . . . . .  $1x = 9$ .

Reszta rozwiązania iak wyżej.

Wzór Mnożenia.	
$x + 1$ .	Mnożnik.
$x + 1$ .	Mnożny.
$xx + x$ .	Wieloczyn, przez $x$ .
$x + 1$ .	Wieloczyn, przez $1$ .
$xx + 2x + 1$ .	Wieloczyn cały.

54. Uwaga. Té dwa wyrażenia  $xx$ , i  $2x$ , są różne od siebie: pierwsze wypada z rozmnożenia  $x$ , przez  $x$ , drugie z rozmnożenia  $x$ , przez  $2$ . Jeżeli  $x$ , znaczy  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ; tedy pierwsze wyrażenie znaczyć będzie

$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$ , i t. d. a drugie znaczyć będzie  $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$ , i t. d. Ta różnica, tym się większą bydz pokazuje, im znaczenie  $x$  jest większe. W tym tylko razie  $xx$ , i  $2x$ , jedno wyraża, gdy  $x$ , znaczy  $2$ . (Miałamy tu ważność  $0$ , którąby czasem  $x$ , znaczyć mogło.)

Insze przykłady. Znaleźć taki kwadrat, do którego, każdego boku przyddawłszy  $1$  stopę, zrobi się kwadrat inszy większy w powierzchni od pierwszego, 25 stopami kwadratowemi

Znaleźć kwadrat taki, do którego boków przyddawłszy po  $2$  stopy, zrobi się kwadrat większy od pierwszego w powierzchni 40 stopami kwadratowemi



*Przykład postępowania przez rozumowanie.*

Fig. 13.

Ponieważ w ostatnim przykładzie, kwadrat drugi większy jest od kwadratu pierwszego, naprzód, dwoma prostokątami mającemi w jednym boku po dwie stopy, a w drugim tyle długości, ile ma kwadrat pierwszy: powtóre kwadratem jednym, którego bok każdy zawiera 2 stopy, a zatem powierzchnią 4 stopy kwadratowe; więc dwa tamté prostokąty razem wzięte, zawierać będą 36 stóp kwadr: a każdy z nich mieć będzie 18 stóp kwadratowych. Każdy z tych dwóch prostokątów podzielić można na dwa równe prostokąty mające w szerokości stopę 1, a długość równą długości pierwszego kwadratu. Będzie tedy powierzchnią każdego z tych ostatnich prostokątów 9 stóp: a że ma w szerokości stopę 1; więc długość jego, a zatem i kwadratu pierwszego będzie 9 stóp.

Bok 1go Kwadratu będzie . . . . 9 stóp.

Bok 2go Kwadratu . . . . . 11 stóp.

Powierzchnią 2go kwadratu . . . . 121 stóp kwadr.

Powierzchnią 1go kwadratu . . . . 81 stóp kwadr.

Różnica tych powierzchni . . . 40 stóp kwadr.

*Algebraicznie.* Bok 1wszego kwadratu . . . .  $x$ .

Powierzchnią 1wszego kwadratu . . . . .  $xx$ .

Bok 2go kwadratu . . . .  $x + 2$ .

Powierzchnia . . . . .  $xx + 4x + 4$ .

Różnica dwóch powierzchni . . . .  $4x + 4$ .

*Warunek.*  $4x + 4 = 40$ .

(Odiąwszy 4) . . . .  $4x = 36$ .

(Podzieliwszy przez 4)  $x = 9$ .

*Rozwiąz;*  $x = 9$ . Bok 1wszego kwadratu.

Reszta rozwiązania iak wyżej.

*Wzór mnożenia.*

$x + 2$ . Mnożnik.

$x + 2$ . Mnożny.

$xx + 2x$ . Wieloczyn przez  $x$ .

$2x + 4$ . Wieloczyn przez 2.

$xx + 4x + 4$ . Wieloczyn cały.

*Inszé przykłady.* Przydawszy do boku kwadratu stóp 3, 4, 5, 6, i t. d. powierzchnią większą będzie stóp kwadr. 57, 88, 145, 168. i t. d.

55. Zadanie 36 Mám prostokąt dwa razy tak długi, jak szeroki: dodaę do każdego boku po 1 stopie, i będę miał powierzchnią większą 19 stóp kwadr. od pierwszely.

*Arytmetycznie.* Różnicę tych dwóch prostokątów rozłożyć mogę na Fig. 14. dwa prostokąty, mające iednę stopę szerokości, a długość równą bokóm pierwszego prostokąta, i na kwadrat którego bok iest na stopę: a zatem powierzchnią zawiera iednę stopę kwadratową. Będzie tedy summa dwóch prostokątów 18 stóp kwadr. Że zaś ich szerokość iest iednakową, a długość iednego 2 razy tylą, ilą długość drugiego; więc większy z tych prostokąt mogę podzielić na dwa równe mnieyszemu, a summa wszystkich trzech, równać się będzie trzem prostokątom równym temu prostokątowi mnieyszemu. Má zatem ieden z tych trzech prostokątów 6 stóp kwadr: a że stopę iednę má szerokości; więc długości mieć będzie stóp 6: która to długość równą iest szerokości pierwszego prostokąta szukanego.

Szerokość 1go prostokąta . . . . . 6 stóp.  
Długość . . . . . 12 stóp.  
Powierzchnią . . . . . 72 stóp kwadr.

Szerokość 2go prostokąta . . . . . 7 stóp.  
Długość . . . . . 13 stóp.  
Powierzchnią . . . . . 91 stóp kwadr.

Różnica dwóch powierzchni . . . 19 stóp kwadr.

*Algebraicznie.* Szerokość 1go prostokąta . . . . .  $x$ .  
Długość . . . . .  $2x$ .  
Powierzchnią . . . . .  $2xx$ .

Szerokość 2go prostokąta . . . . .  $x + 1$ .  
Długość . . . . .  $2x + 1$ .  
Powierzchnią . . . . .  $2xx + 3x + 1$ .  
Różnica dwóch powierzchni . . .  $3x + 1$ .

Warunek.  $3x + 1 = 19$ .

Przerób: (Odiąwszy 1) . . .  $3x = 18$ .  
(Podzieliwszy przez 3)  $1x = 6$ .

Rozwiązanie . . . . .  $x = 6$ .

Refzta rozwiązania iak wyžęy.

Wzór mnożenia.

$2x + 1$  . . Mnożny.

$x + 1$  . . Mnożnik.

$2xx + x$  . . Wieloczyn przez  $x$ .

$2x + 1$  . . Wieloczyn przez 1:

$2xx + 3x + 1$  . Wieloczyn cały.

*Inszé przykłady.* Gdy bok iedén prostokąta iest 3, 4, 5, razy i t. d. tak wielki, iak drugi; tedy dodawszy po iednę stopie do obu dwoch, powierzchnia druga więkšza będzie od piérwszēy, 29, 31, 37, i t. d. stopami kwadr.

Niech znouu bok iedén będzie 4 razy tak wielki, iak drugi: dodawszy 3 stopy do długości, a 2, stopy do szerokości iego; powierzchnia druga, więkšza będzie od piérwszēy, 94 stóp. kwadr.

56. *Przeštoga.* Przez takie przykłady wprowadzić trzeba uczniów do Algebraicznego mnożenia. W tym razie, gdy tak mnożnik, iak i mnożny więcéy niż iedén wyraż zawieraia, a wszystkie té wyrazy są przydawné; wieloczynem całym iest summa wieloczynów z mnożnego, przez każdy w szczególności wyraż mnożnika.

W mnożeniu Algebraicznym zaczyna się zawsze od piérwszego po lewéy ręce wyrazu, tak w mnożniku, iak i w mnożnym. Tén sposób postępowania náywygodniejszy był, gdy wyrazy ilości mnożnéy, lub mnożący miały przed sobą odmienné znaki: i to było powodem do dania ogólnéy reguły.

W ułożeniu Wieloczynów z mnożnego, przez każdą z osobna część mnożnika, trzeba się starać, aby wyrazy iednakowégó gatunku, piśać iedné pod drugiemi.

*Przykłady mnożenia złożonégó, i w które wchodzi samé tylko wyrazy przydawné.*

I.

$2x + 1$  . . . . Mnożny.

$3x + 2$  . . . . Mnożnik.

$6xx + 3x$  . . . Wieloczyn przez  $3x$ .

$4x + 2$ .



$4x + 2$ . Wieloczyn przez 2.

$6xx + 7x + 2$ . Wieloczyn cały.

II.

$5x + 3$ . . . . . Mnożny.

$4x + 6$ . . . . . Mnożnik.

$20xx + 12x$ . . . . . Wieloczyn przez  $4x$ .

$30x + 18$ . . . . . Wieloczyn przez 6.

$20xx + 42x + 18$ . Wieloczyn cały.

57. Zadanie 37. Jakież jest ten kwadrat, od którego jednégo boku, odciwwszy 1 stopę, a do drugiégo przydawszy 2 stopy, zrobi się prostokąt z tych dwóch boków tak odmiennych więkşzy w powierżchni 10 stóp kwadr. od kwadratu?

Niech będzie kwadrat  $AXYZ$ , którego szukamy, a którego bok  $AZ$ , zmniejszyony jest ilością  $PZ$ , równą jednéy stopie, a bok  $AX$ , powiękşzony jest ilością  $QX$ , równą dwóm stopóm. Niech będzie  $AQRP$ , prostokąt, przewyższający kwadrat  $AXYZ$ , 10 stopami kwadr: niech linie  $ZY$ ,  $QR$ , przeciągnione przecinaia się w punkcie  $S$ , a linie  $PR$ ,  $XY$ , w punkcie  $T$ . Od kwadratu  $AXYZ$ , odity prostokąt  $PTYZ$ , a dodany prostokąt  $QRTX$ . Więc różnica między prostokątem  $AQRP$ , a kwadratem  $AXYZ$ , równa się różnicy między prostokątem  $QRTX$ , a prostokątem  $PTYZ$ . A że pierwsza różnica má być równa 10 stóp. kwadratowym; więc i druga. Ze zaś prostokąt  $TRSY$ , má w sobie 2 stopy kw. przeto różnica między prostokątem  $XQSY$ , a prostokątem  $PTYZ$ , będzie 12 stóp kw. A ponieważ te dwa ostatnie prostokąty mają jednakową długość, to jest równą długości boku kwadratu, a szerokość pierwszego dwa razy jest tak wielką, iak szerokość drugiego; więc téż pierwszy prostokąt będzie dwa razy tak wielki, iak drugi: a zatem różnica między nimi równać się będzie drugiemu prostokątowi  $PTYZ$ . Tén więc prostokąt  $PTYZ$ , má w sobie 12 stóp kw: że zaś szerokości má tylko jednę stopę; więc długości mieć będzie 12 stóp. Ta długość jest bokiém kwadratu: więc i bok kwadratu 12 stóp zawiera.

Fig. 15.

Bok kwadratu . . . . 12 stóp. . . . Szerokość prostokąta 11 stóp.  
 Powierzchnia . . . . 144 stóp kw. . . . Długość . . . . 14 stóp.  
 . . . . Powierzchnia . . . 154 stóp kw.  
 Różnica dwóch powierzchni . . . . . 10 stóp kw.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Bok kwadratu szukanego . .  $x$ .  
 Powierzchnia . . . . .  $xx$ .  
 Szerokość prostokąta . . .  $x - 1$ .  
 Długość . . . . .  $x + 2$ .  
 Powierzchnia prostokąta . .  $xx + 1x - 2$ .  
 Różnica 2ch powierzchni . .  $1x - 2$ .

*Warunek.*  $1x - 2 = 10$ .

*Przerób.* (Dodawszy 2)  $1x = 12$ .  
 Reszta rozwiązania jak wyżej.

<i>Wzór mnożenia.</i>	
$x - 1$ . .	Mnożny.
$x + 2$ . .	Mnożnik.
<hr/>	
$xx - 1x$ .	Wieloczyn przez $x$ .
$2x - 2$	Wieloczyn przez 2.
<hr/>	
$xx + 1x - 2$	Wieloczyn cały.

§ 8. *Uwaga.* Gdyby od jednego boku kwadratu odieśliśmy, a do drugiego dodali tę samą liczbę stóp np. . . . . 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. powierzchnia zmniejszyłaby się . . . . . 1, 4, 9, 16, 25, 36, i t. d. łopami kwadr. W takim razie, odmiana uczyniona w powierzchni wyznaczona jest przez odmiany uczynione w bokach kwadratu, a przeto nie może służyć za warunek.

*Inszé przykłady.* Mam prostokąt, którego długość dwa razy jest tak wielką, jak szerokość. Gdy przydam do szerokości 3 stopy, a ujmę od długości 2 stopy; powierzchnia prostokąta powiększy się 18 stopami kwadratowemi.

Mam prostokąt, którego długość trzy razy jest tak wielką, jak szerokość. Gdy przydam 2 stopy do szerokości, a ujmę 3 stopy od długości; powierzchnia prostokąta powiększy się 27 stopami kwadratowemi.

*Prześroga.* Te, i tym podobne przykłady tym końcem dawané będą, aby wprowadzić Uczniów do mnożenia, w którym ieden, lub więcej razy kładzie się ze znakiem odejmowania

59. Przykłady mnożenia złożonego, w których jeden z czynników zawiera ilość ujemną.

I.

$$\begin{array}{rcl}
 2x - 2 & \dots & \text{Mnożny.} \\
 x + 3 & \dots & \text{Mnożnik.} \\
 \hline
 2xx - 2x & \dots & \text{Wieloczyn przez } x. \\
 6x - 6 & \dots & \text{Wieloczyn przez } 3. \\
 \hline
 2xx + 4x - 6 & & \text{Wieloczyn cały.}
 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{rcl}
 3x - 3 & \dots & \text{Mnożny.} \\
 x + 2 & \dots & \text{Mnożnik.} \\
 \hline
 3xx - 3x & \dots & \text{Wieloczyn przez } x. \\
 6x - 6 & \dots & \text{Wieloczyn przez } 2. \\
 \hline
 3xx + 3x - 6 & & \text{Wieloczyn cały.}
 \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{rcl}
 4x - 5 & \dots & \text{Mnożny.} \\
 3x + 2 & \dots & \text{Mnożnik.} \\
 \hline
 12xx - 15x & \dots & \text{Wieloczyn przez } 3x. \\
 + 8x - 10 & \dots & \text{Wieloczyn przez } 2. \\
 \hline
 12xx - 7x - 10 & & \text{Wieloczyn cały.}
 \end{array}$$

Ponieważ jedna zawsze wypada ilość z rozmnożenia, którąkolwiek ze dwóch ilości do mnożenia podanych, weźmiemy za mnożnego, lub mnożnika; przeto w przykładach poprzedzających braliśmy za mnożną ilość tę, która wyraż ujemny zawierała. Trzeba jednak wprawiać Uczniów w takie mnożenie, gdzie w ilość mnożącą wchodzi wyraż ujemny: tym końcem przykłady poprzedzające wspanczym porządkiem, tu się znowu podają.

I

I.



I.

$$\begin{array}{rcl}
 x + 3 & . . . . . & \text{Mnożny.} \\
 2x - 2 & . . . . . & \text{Mnożnik.} \\
 \hline
 2xx + 6x & . . . . . & \text{Wieloczyn przez } 2x. \\
 - 2x - 6 & & \text{Wieloczyn przez } - 2. \\
 \hline
 2xx + 4x - 6 & & \text{Wieloczyn cały.}
 \end{array}$$

*Uwaga.* Gdyby  $x + 3$  mnożyło się tylko przez  $2x$ , ilość ślad rozmnożoną byłaby  $2xx + 6$ : ale że przypadało mnożyć przez  $2x$  zmniejszone przez 2; więc wzięło się nad to  $x + 3$  dwa razy: a zatem od pierwszej ilości rozmnożonej  $2xx + 6$ , trzeba odjąć  $x + 3$ , dwa razy wzięte, to jest trzeba odjąć  $2x + 6$ , albo, (co na jedno wychodzi) dodać  $- 2x - 6$ .

II.

$$\begin{array}{rcl}
 x + 2 & . . . . . & \text{Mnożny.} \\
 3x - 3 & . . . . . & \text{Mnożnik.} \\
 \hline
 3xx + 6x & . . . . . & \text{Wieloczyn przez } 3x. \\
 - 3x - 6 & & \text{Wieloczyn przez } - 3. \\
 \hline
 3xx + 3x - 6 & & \text{Wieloczyn cały.}
 \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 2 & . . . . . & \text{Mnożny.} \\
 4x - 5 & . . . . . & \text{Mnożnik.} \\
 \hline
 12xx + 8x & . . . . . & \text{Wieloczyn przez } 4x. \\
 - 15x - 10 & & \text{Wieloczyn przez } - 5. \\
 \hline
 12xx - 7x - 10 & & \text{Wieloczyn cały.}
 \end{array}$$

60. Zadanie 38. Mam kwadrat taki, od którego jednego boku odjąwszy 1 stopę, a od drugiego odjąwszy 2 stopy, powiększnią zmniejszając się 22 stopami kwadr.

Niech będzie  $AXYZ$ , kwadrat taki, aby od jednego boku jego  $AZ$ ,  
Fig. 16. odjąwszy  $PZ$ , długość jednej stopy, a od drugiego boku  $AX$ , odjąwszy  $QX$ ,  
długość

długość dwóch stóp, i zrobiwszy prostokąt AQRP, z linii AQ, AP, także kwadrat większy był od prostokąta 22 stopami kwadr.

Niech PR, spotyka XY, w T, Nadmiarém kwadratu nad prostokąt; będzie summa prostokątów PTYZ, QXTR. Aby zaś mieliśmy tylko do czynienia z prostokątami, których długość równałaby się bokowi kwadratu; przedłużmy TX QR, ilościami Xt, Qr, z których każda równałaby się jednej stopie, i dokończmy prostokąta QXtr, który zawierać będzie 2 stopy kwadr. Summa prostokątów PTYZ, QXTR, czynić powinna 22 stóp kwadr. więc summa prostokątów PTYZ, TRrt, czynić będzie 24 stóp kwadr: a że ich długości są równe, a szerokość drugiego TRrt, dwa razy jest tak wielką, jak szerokość pierwszego PTYZ; więc ich summa trzy razy będzie tak wielką, jak także pierwszy prostokąt PTYZ: więc prostokąt PTYZ, trzy razy wzięty zawierałby 24 stóp kwadratowych, a zatem raz wzięty zawiera 8 stóp kwadr. Ze zaś ma jedną stopę szerokości; więc długość jego, która oraz jest bokiém kwadratu, ma 8 stóp.

Bok kwadratu szukanego . . . 8 st:  
Powierzchnią . . . 64 st: kw:  
Szerokość prostokąta . . . 6 st:  
Długość . . . 7 st:  
Powierzchnią . . . 42 stóp kwadr.  
Różnica dwóch powierzchni 22 stóp kwadr.

*Algieb: Mian:* Bok kwadratu szukanego . . .  $x$ .  
Powierzchnią . . .  $xx$ .  
Szerokość prostokąta . . .  $x - 2$ .  
Długość . . .  $x - 1$ .  
Powierzchnią . . .  $xx - 3x + 2$ .

*Sposób postępowania w mnożeniu ilości  $x - 2$  przez  $x - 1$ .*

Gdyby przypadało mnożyć  $x - 2$ , przez  $x$ , ilość stąd rozmnożoną byłaby  $xx - 2x$ : a że przypada mnożyć  $x - 2$  przez liczbę mniejszą jednością; więc się wzięło  $x - 2$  jeden raz nad to: a zatem od  $xx - 2x$ , trzeba jeszcze odjąć  $x - 2$ . Odiąwszy samo  $x$ , byłoby  $xx - 3x$ : ale że się odjęło 2 nadto; więc ie trzeba dodać, i będzie  $xx - 3x + 2$ . Na jedno też wyniesie, gdy do  $xx - 2x$  dodamy  $-x + 2$ : wypadnie albowiem to samo co i wyżej, to jest  $xx - 3x + 2$ .

Różnica dwóch powierzchni wyraża się odjąwszy  $xx - 3x + 2$  od  $xx$ ,  
i będzie  $3x - 2$ .

Warunek.  $3x - 2 = 22$ .

Przerabianie. (Dodawszy 2)  $3x = 24$ .

(Podzieliwszy przez 3)  $x = 8$ .

Reszta iak wyżéy.

61. Uwaga. Można tu było uniknąć mnożenia, w któreby wchodzi-  
ły ilości ujemne.

I tak niech będzie szerokość prostokąta  $x$ .

a zatem bok kwadratu  $x + 2$ .

Długość prostokąta mnieyszą jednością od

boku kwadratu  $x + 1$ .

Powierzchnia kwadratu będzie  $xx + 4x + 4$ .

Powierzchnia prostokąta  $xx + 1x$ .

Różnica  $3x + 4$ .

Warunek.  $3x + 4 = 22$ .

Przerab.: (Odiąwszy 4)  $3x = 18$ .

(Podzieliwszy przez 3)  $x = 6$ . Szerokość prostokąta.

$x + 2 = 8$ . Bok kwadratu.

W szukaniu jednak rozwiązania podobnych zadań, trzeba sobie za cel  
wystawiać, uprawianie Uczniów w takie mnożenie, w którego ilość tak mno-  
żącą, iako i mnożną wchodzą wyrazy ujemne.

Inszé przykłady. Mam prostokąt, którego długość, dwa razy jest  
tak wielką, iak szerokość: wymniéj mu po jednej stopie z każdego boku, przez  
co powierzchnia zmniejszyła się 20 stopami kwadr.

Mam prostokąt, którego długość trzy razy jest tak wielką, iak szerokość:  
wymniéj jedną stopę z szerokości, a 2 stopy z długości, przez co powier-  
zchnia zmniejszyła się 23 stopami kwadr.

62. Przykłady mnożenia, w którym tak mnożny, iak i mnożnik za-  
wierają wyrazy ujemne.



I.

$$\begin{array}{l} x - 1. \dots \text{Mnożny.} \\ 2x - 1. \dots \text{Mnożnik.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2xx - 2x. \dots \text{Wieloczyn przez } 2x. \\ - x + 1. \dots \text{Wieloczyn przez } - 1. \end{array}$$

$$2xx - 3x + 1. \text{ Wieloczyn cały.}$$

II.

$$\begin{array}{l} x - 1. \dots \text{Mnożny.} \\ 3x - 2. \dots \text{Mnożnik.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3xx - 3x. \dots \text{Wieloczyn przez } 3x. \\ - 2x + 2. \dots \text{Wieloczyn przez } - 2. \end{array}$$

$$3xx - 5x + 2. \text{ Wieloczyn cały.}$$

III.

$$\begin{array}{l} 2x - 3. \dots \text{Mnożny.} \\ 3x - 5. \dots \text{Mnożnik.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6xx - 9x. \dots \text{Wieloczyn przez } 3x. \\ - 10x + 15. \dots \text{Wieloczyn przez } - 5. \end{array}$$

$$6xx - 19x + 15. \text{ Wieloczyn cały.}$$

W tych i infzych przykładach używszy rozumowania podobnego przytoczonému w przykładzie piérwifzym tego Zadania, można potém przyfląpić do téy ogólnéy reguły: że gdy się *mnęzą* ieden przez drugi dwa wyraży z iednakowym znakiem, toieft albo obadwa przydayné, albo obadwa ujemné; ilość z nich rozmnożoną będzie przydayną, czyli poprzedzoną znakiem dodawania +: ieżeli zaś té dwa wyraży będą miały odmienné znaki, toieft, ieżeli ieden będzie przydayny, a drugi ujemny; tedy ilość z nich rozmnożoną, będzie ujemną, czyli poprzedzoną znakiem odejmowania —.

63. Zadanie 39. Znaleźć dwie liczby, którychby różnica była 4, a różnica ich kwadratów 72.

Fig. 17.

*Przez rozumowanie.* Niech linią AB, wyraża różnicę daną liczb dwóch szukanych AX, BX, których różnica kwadratów także jest daną. Wykreślmy na tych liniach AX, BX, kwadraty AXSP, BXYZ: różnicą tych dwóch kwadratów, są dwa prostokąty, QYSP, i ARZQ, które obadwa jednakową mają szerokość, to jest równą linii AB, a z których pierwszy ma za długość bok większego kwadratu, a drugi ma za długość, bok mniejszego kwadratu. Będzie przeto summa tych dwóch prostokątów, równa innemu prostokątowi téżże samej szerokości, a długości równy summie długości tych dwóch prostokątów, to jest równy summie dwóch boków dwóch kwadratów. A że szerokość tego prostokąta miałaby 4 stopy, a powierzchnia miałaby 72 stóp kwadratowych, więc długość powinna mieć stóp 18.

Zadanie tedy poprzedzające, wychodzi na jedno, iak gdyby przypadało szukać dwóch liczb, których summa 18, a różnica 4. Té dwie liczby (podług zadania 3go) będą 11, i 7.

Kwadrat z 11	. . . . .	121.
Kwadrat z 7	. . . . .	49.
Różnica	. . . . .	72.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Mniejszy liczb . . . . .  $x$ .  
Większa . . . . .  $x + 4$ .  
Kwadrat większy . . . . .  $xx + 8x + 16$ .  
Kwadrat mniejszy . . . . .  $xx$ .

Różnica kwadratów . . . . .  $8x + 16$ .

*Warunek.*  $8x + 16 = 72$ .

*Przerabianie.* (Odiąwszy 16) . . . . .  $8x = 56$ .  
(Podzieliwszy przez 8) . . . . .  $1x = 7$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 7$ . Mniejszy liczb.  
Reszta iak wyżej.

*Insze przykłady.* Znaleźć dwie liczby, których różnica jest 6: a różnica kwadratów: 120.

Znaleźć dwie liczby, których różnica jest 8, a różnica kwadratów 144.

64. Zadanie 40. Znaleźć dwie liczby, których summa jest 18, a różnica kwadratów 72.

*Przez*

*Przez rozumowanie.* W figurze zadania poprzedzającego summa prostokątów AQZB, PQYS, która jest różnicą kwadratów z AX, i z BX; równa się prostokątowi mającemu za szerokość różnicę szukaną dwóch linii AX, BX, a za długość sumę daną 18. A że powierzchnią tego prostokąta jest 72; więc różnica, której szukamy, znalezioną będzie, podzieliwszy 72 przez 18, i ta będzie 4. Zadanie więc wypada na jedno, iak gdyby nam szukać przypadało dwóch liczb, których różnica jest 4, a summa 18, podobnie iak w zadaniu poprzedzającym.

*Algebraicznie.* Mian: Mniejszy liczb . . . . .  $x$ .  
 Większą . . . . .  $18 - x$ .  
 Kwadrat z większój  $324 - 36x + xx$ .  
 Kwadrat z mniejszój . . . . .  $xx$ .

Różnica kwadratów . .  $324 - 36x$ .

*Warunek.*  $324 - 36x = 72$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy  $36x$ ) . . . .  $324 = 72 + 36x$ .

(Odiawszy 72) . . . .  $252 = 36x$ .

(Podzieliwszy przez 36)  $7 = x$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 7$ .

$18 - x = 11$ .

*Sprawdzenie.*  $324 - 36x + xx = 121$ . Kwadrat większój liczby.

$xx = 49$ . kwadrat mniejszój.

$324 - 36x = 72$ . Różnica kwadratów.

*Insze przykłady.* Znaleźć dwie liczby, których summa jest 24, a różnica kwadratów 192.

Znaleźć dwie liczby, których summa jest 32, a różnica kwadratów 192.

65. Różne Zadania zabawne.

I.

Ma kto kárt 32: trzy z nich wyciągł, i na każdą z tych trzech kárt tyle innych kładzie, ile téj karcie ók brakuje do dopełnienia liczby 15. Zostaje mu kárt 8, iakąż jest summa ók w trzech kartach na spodzie położonych?

*Ary-*



*Arytmetycznie.* Summa ók każdéy z tych trzech kárt i liczby kárt innych na niéy położonych powinna bydź 15: trzy więc takie summy uczynią 45. Ponieważ zaś wszystkich kárt wzięło się 32, spodnich jest 3, a pozostałych 8, co uczyni 11: więc kárt wszystkich położonych na trzech spodnich będzie 21: a zatem różnica 21, od 45, to jest 24, będzie liczbą oznaczającą summę ók, w 3 kartach spodnich.

*Algieb: Mian:* Summa ók we trzech kartach spodnich . . .  $x$ .  
 Summa kárt wierzchnich . . . . . 45 —  $x$ .  
 Summa kárt w 3 kupkach . . . . . 48 —  $x$ .

Ponieważ, wszystkich kárt było 32, a 8 się zostało, więc w trzech kupkach będzie kárt 24.

*Warunek.*  $48 - x = 24$ .

*Przerób:* (Dodawszy  $x$ )  $48 = 24 + x$ .  
 (Odiąwszy 24)  $24 = x$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 24$ . Summa ók w trzech kartach spodnich.  
 $45 - x = 21$ . Summa kárt wierzchnich.  
 $48 - x = 24$ . Summa kárt we 3 kupkach.

*Inszé przykłady.* Ze 32 kárt wyciągamy 4, i na każdéy z tych 4, kładziemy tyle kárt, ile iéy okóm nie dostaie, do dopełnienia liczby 12. Zostaie kárt 5.

Z kárt 52 wyciągamy 5, i tyle innych na każdą kładziemy, ile iéy okóm nie dostaie do dopełnienia liczby 16. Zostaie kárt 10.

## II.

Osoba, *A*, mówi do *B*, aby sobie pomyśliła liczbę jaką, aby ją podwoiła, do podwoionéy przydała 8, i całéy summy, aby wzięła połowę. *B*, wykonawszy to wszystko, wyjawia przed *A*, samę tylko ostatnią liczbę i mówi że ma 10. Jakże sobie postąpi *A*, chcąc dótydź pierwszézéj liczby od *B*, pomyślanéy?

Gdyby osoba *A*, nie nie kazała dodawać do podwoionéy liczby, tedy dwa działania, iedno podwoienia liczby, drugié podzielénia iéy na połowę, zniszczyłyby się iedno przez drugié, i połowa liczby podwoionéy, byłaby tą samą liczbą, którą osoba *B*, pomyślała. Ale że *B*, podwoiwszy liczbę pomyślaną

myślana dodała do niej 8, i tę dopiero summy wzięła połowę; więc ta połowa będzie sumą liczby pomysłanej, i połowy ośmiu, to jest 4. Ponieważ zaś ta ostatnia summa jest 10; więc liczba pomysłana jest czterema mniejszą, a zatem jest 6.

Liczba pomysłana . . . . . 6.  
Taż podwojona . . . . . 12.  
Powiększona ośmiu . . . . . 20.  
Połowa téj summy . . . . . 10.

*Algibr: Mian:* Liczba pomysłana . . . . .  $x$ .  
Podwojona . . . . .  $2x$ .  
Powiększona ośmiu . . . . .  $2x + 8$ .  
Połowa . . . . .  $x + 4$ .

*Warunek.*  $x + 4 = 10$ .

*Przerabianie.* (Odiąwszy 4)  $x = 6$ .  
Reszta iak wyżej.

*Inszé przykłady.* Osoba B, tróí tę liczbę, którą pomyslała, do potrojonéj dodaje 15, a wzięwszy trzecią część téj summy, má 12.

B, mnoży liczbę pomysłaną przez 4, do rozmnożonéj przez 4, dodaje 12, i bierze czwartą część téj summy: wypadá 13 na wieloráz.

### III.

*W sali kwadratowéj jest 8 kórnórek równych przy czterech ścianach téj sali, po trzy przy każdéj ścianie. W każdéj kórnórcie mieszka trzech Uczniów: z tych wychodzi 4, a pozostali tak się w kórnórkach rozstawiają, że liczba ich w każdym rzędzie kórnórek jest ta sama co i przedtém, gdy wszyscy byli przytomni.*

*Arytmetycznie.* Liczba Uczniów postawionych naprzód w jednym rzędzie kórnórek, jest 9: bo we dwóch kórnórkach narożnych jest ich 6, a w każdéj kórnórcie średniéj, jest ich 3.

Ponieważ wszystkich kórnórek jest 8, a w każdéj po 3 Uczniów; więc wszystkich Uczniów było naprzód 24. Czterech z nich wyszło, więc zostało się 20. Ci pozostali Uczniowie mają się mieścić w 4 kórnórkach średnich, i w 4 narożnych: a zatem liczba ich w jednéj kórnórcie średniéj, i w jednéj narożnéj, będzie czwartą częścią 20, to jest 5. Ze zaś liczba po-

mieszczonych we dwóch kómkach narożnych, i w iedney śrzedniy powin-  
na bydź 9; więc w iedney kómkce narożney tylę się ich mieścić powinno,  
ilę iest różnica 5 od 9, toiest 4. W każdę przeto śrzedniy kómkce,  
będzie tylko po 1 Uczniu.

<i>Algebraicznie.</i>	Liczba Uczniów w jedney kómkce narożney . . .	$x$ .
	we dwóch narożnych . . . . .	$2x$ .
	w jedney śrzedniy . . . . .	$9 - 2x$ .
	we czterech narożnych . . . . .	$4x$ .
	we czterech śrzednich . . . . .	$36 - 8x$ .
	we wszystkich 8 kómór. . . . .	$36 - 4x$ .

*Warunek.*  $36 - 4x = 20$ .

*Przerábianie.* (Dodáwşy  $4x$ ) . . . . .  $36 = 20 + 4x$ .  
(Odiáwşy 20) . . . . .  $16 = 4x$ .  
(Podzieliwşy przez 4)  $4 = 1x$ .  
Reszta iak wyżęy.

*Inşe przykłady.* Liczba tych osób nie zmniejszą się ale powiększą  
liczbę 4 lub 8.

Niech znou liczba osób w każdę kómkce będzie 5, i niech wşyśkich  
liczba zmniejszą się liczbę 4, lub 8: albo powiększą czterema, ośmią, dwuna-  
stą lub szesnástą.

## ROZDZIAŁ II.

*Zagádnięnia, w które wchódzą ilości ułómkowę.*

**W** Rozdziele poprzedzaiącym, takich się dobięrało przykładów, gdzie  
samę tylko wchodźily ilości całkowitz. W tym co idzie Rozdzie-  
le, z ułómkami szczególnięy mieć do czyniēnia będziemy.

66. *Zadanię 1.* Pewná osoba włożyła w jedę handel trzecią część  
swęgo majątku, a w drugi czwartą część tegoż majątku. Zostało ię się Zł.

15000.



15000. Jakiż był ię cały majątek, i iak wiele z niego włożyła w każdy z tych dwóch handlów?

*Arytmetycznie.* Summa trzeciéy i czwártéy części majątku téy osoby iest summa  $\frac{4}{12}$  i  $\frac{3}{12}$ , toiest  $\frac{7}{12}$  ię majątku. Włożywszy więc w obadwa handle  $\frac{7}{12}$  majątku swégo, zostanie ię się  $\frac{5}{12}$ : a zatem té  $\frac{5}{12}$  wazą 15000 Zł. Jedaa taká dwunástá część wazý 300 Zł. a przeto cały majątek toiest 12 razy  $\frac{1}{12}$ , wazýć będzie 12 razy 3000 Zł. toiest 36000 Zł.

Majątek téy osoby . . .	36000 Zł.
Część w piérwszy handel włożóná . .	12000.
Część w drugi handel włożóná . . .	9000.
Część pozostała . . .	15000.

Summa tych trzech części 36000 Zł.

*Algiebr:* Mian: Majątek téy osoby . . . . .  $x$ .  
 Część włożóná w piérwszy handel . .  $\frac{7}{12}x$ .  
 Część włożóná w drugi handel . . .  $\frac{3}{12}x$ .

*Warunek.*  $\frac{7}{12}x + \frac{3}{12}x + 15000 = x$ .

*Przerób:* (Przywiódłszy ułómki do iednakowégó mianownika)

$\frac{4}{12}x + \frac{3}{12}x + 15000 = x$ .  
 (Dodáwłszy ułómki) . . . . .  $\frac{7}{12}x + 15000 = x$  albo  $= \frac{5}{12}x$ .  
 (Odiąwłszy  $\frac{7}{12}x$  po obu stronach) . .  $15000 = \frac{5}{12}x$ .  
 (Podzieliwłszy przez 5 obie strony) .  $3000 = \frac{1}{12}x$ .  
 (Rozmnożywłszy przez 12 obie str:)  $36000 = x$ .

*Rozwiązanié.*  $x = 36000$ .

Reszta rozwiązaní, tak, iak w postępowaniu Arytmetyczném.

*Inszé przykłady.* Pewná osoba włożyła w jedén handel trzecią część swégo majątku, a w drugi  $\frac{2}{3}$  tegoż majątku. Zostało ię się Zł. 20000.

Pewná osoba włożyła w jedén handel  $\frac{2}{3}$  swégo majątku, a w drugi,  $\frac{3}{4}$ . Zostało ię się 24000 Zł.

67. Zadanié 2. Pewná osoba włożyła w handel  $\frac{2}{3}$  swégo majątku, a kupiła dóm za  $\frac{2}{3}$  tegoż majątku. Summa tych dwóch części czyni 40000 Zł. Jakiż iest ię cały majątek?

*Arytmetycznie.* Summa złożona z  $\frac{2}{3}$  i z  $\frac{2}{7}$  majątku téj osoby, jest summa z  $\frac{1}{2}$ , i z  $\frac{6}{21}$ , to jest  $\frac{9}{14}$ . Aże ta summa  $\frac{9}{14}$ , wynosi na 40000 Zł: więc  $\frac{2}{3}$ , majątku téj osoby waży 40000 Zł: a  $\frac{1}{21}$  ważyć będzie 20 razy mniej, to jest 2000 złotych. Cały więc majątek téj osoby będzie 21 razy 2000 Zł. to jest 42000 Zł.

Cały majątek téj osoby . . . . .	42000 Zł.
$\frac{2}{3}$ tego majątku . . . . .	28000.
$\frac{2}{7}$ . . . . .	12000.

Summa tych dwóch części . . . 40000.

<i>Algebraicznie.</i> Cały téj osoby majątek . . . . .	$x$ .
$\frac{2}{3}$ tego majątku . . . . .	$\frac{2}{3}x$ .
$\frac{2}{7}$ . . . . .	$\frac{2}{7}x$ .

*Warunek.*  $\frac{2}{3}x + \frac{2}{7}x = 40000$ .

*Przerób:* (Przywiódłszy dwa ułamki do jednakowego mianownika)

	$\frac{1}{21}x + \frac{6}{21}x = 40000.$
(Dodawszy dwa ułamki) . . . . .	$\frac{7}{21}x = 40000.$
(Podzieliwszy przez 20) . . . . .	$\frac{1}{3}x = 2000.$
(Rozmnożywszy przez 21) . . . . .	$1x = 42000.$

*Rozwiązanie.*  $x = 42000$ .

*Reszta rozwiązania tak, jak w postępowaniu Arytmetyczném.*

*Inszé przykłady.* Pewná osoba dała na zysk w jedno miejsce  $\frac{3}{4}$  swégo majątku, a w drugie  $\frac{2}{5}$ . Dała zaś ze wszystkiém. 70000 Zł.

Inszá osoba dała na zysk  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{3}{7}$  swégo majątku, a ze wszystkiém dała Zł. 58000.

68. Zadanie 3. Pewná osoba, rachując zbiór, i wydaték roczny, znalazła, iż zebrała summe równaiącą się  $\frac{5}{8}$  téj majątku, a wydała  $\frac{2}{5}$  tegoż majątku. Więcéy zaś 27000 zebrała niż wydała.

*Arytmetycznie.* Różnica między  $\frac{5}{8}$  i  $\frac{2}{5}$ , albo między  $\frac{25}{40}$  i  $\frac{16}{40}$ , to jest  $\frac{9}{40}$  okazuje różnicę między wydatkiem, i zbiorem téj osoby. Ze zaś ta osoba zebrała więcéy 27000 Zł. niż wydała; więc  $\frac{9}{40}$  całego majątku, równaia

wniał się 27000 Zł. a zatem  $\frac{1}{40}$  uczyni tylko dziewiątą część Zł. 27000, to jest 3000 Zł. A że ta osoba miała 40 razy 3000 Zł. więc cały ten majątek był 120000 Zł.

Majątek téj osoby . . . . . 120000 Zł.

$\frac{5}{8}$  tego majątku, to jest zbiór roczny,

téj osoby . . . . . 75000 Zł.

$\frac{2}{3}$  tego majątku, to jest wydatek roczny,

téj osoby . . . . . 48000 Zł.

Różnica między wydatkiem i zbiorem . . . 27000.

*Algiebr:* Mian: Majątek téj osoby . . . . .  $x$ .

Zbiór roczny . . . . .  $\frac{5}{8}x$ .

Wydatek roczny . . . . .  $\frac{2}{3}x$ .

*Warunek.*  $\frac{5}{8}x - \frac{2}{3}x = 27000$ .

*Przerób:* (Przywiódłszy ułamki do jednakowego mianownika)

$$\frac{25}{40}x - \frac{16}{40}x = 27000.$$

(Wykonawszy oznaczone odejmowanie)  $\frac{9}{40}x = 27000$ .

(Podzieliwszy przez 9)  $\frac{1}{40}x = 3000$ .

(Rozmnożywszy przez 40)  $1x = 120000$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 120000$  Zł. Majątek szukany.

W postępowaniu Arytmetycznym, mamy wzór gotowy rozwiązania.

*Inszé przykłady.* Pewna osoba zyskała  $\frac{5}{7}$  swego majątku, a straciła  $\frac{3}{8}$ . Zysk przewyższa stratę 57000 złotemi.

Dwie robotników kupy użyte są do kopania rowu: jedna z nich wykopała  $\frac{5}{8}$ , a druga  $\frac{2}{7}$  tego rowu: pierwszą zaś wykopała więcej 510 sążni, niż drugą. Ile sążni wykopały obiedwie te kupy?

69. Zadanie 4. Dwie osoby oddalone na 340 mil iadą ku sobie. Jedna wieżdź 2 mile we trzech godzinach, a druga wieżdź 3 mile we 4 godzinach. Kiedyż się z sobą zjadą, i ile mil każda z nich uieżdźie, nim się spotkają?

*Arytmetycznie.* Pierwszą z tych osób wieżdź na godzinę trzecią część dwóch mil, albo  $\frac{2}{3}$  jednéj mili, drugą wieżdź na godzinę czwartą część trzech mil, albo  $\frac{3}{4}$  jednéj mili. W jednéj więc godzinie przybliżają



się do siebie, summa  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{3}{4}$  iednéy mili, toiest  $\frac{17}{12}$  mili, a zátém we 12 godzinach, przybliżają się na mil 17. Tylé więc razy iazdę swoię dwunasto-godzinną té osoby powtórzyć powinny, ilé razy powtórzyć trzeba 17 mil, aby przyśdż do mil 340. Doydziemy zaś tego, dzieląc 340 przez 17. Wieloráz 20, ukaże, iż 20 razy uiechać trzeba było tym osobóm mil 17, aby przeiechały całą odległość mil 340, i razém okaże, iż 20 razy 12 go-dzin, toiest 240 godzin na tę drogęłożyć należało.

Godziny całej iazdy . . . . . 240.

Jazda 1wszély osoby  $\frac{2}{3}$  mili wzięté 240 razy, toiest 160 mil.

Jazda 2giély osoby  $\frac{3}{4}$  mili wzięté 240 razy, toiest 180.

Droga przez obiedwie osoby przeiechaná . . . . . 340.

Możná było doysdż tego samého, przez następujące rozumowanie.

Ponieważ piérwszá osoba uieżdża mil 8, a drugá mil 9 w godzinach 12; więc w jakimkolwiek przeciągu czasu, mile od tych osób uiechané, będą się miały do siebie, iak liczby 8 i 9. Summa zaś mil od obudwóch osób uiechanych, mieć się będzie do mil od iednéy osoby uiechanych, iak 17 do 8, albo 9. Gdy tedy całą drogę, toiest mil 340, podzielimy na 17 czę-ści równych, (z których każda zawierać będzie mil 20) piérwszą z tych osób uiedzie 8 razy, tę część toiest uiedzie mil 160, a drugá uiedzie też samą część razy 9, toiest uiedzie mil 180.

*Algiebr. Mian:* Liczba godzin całej iazdy . . . . .  $x$ .

Droga uiechaná przez piérwszą osobę

$\frac{2}{3}$  mili. razy  $x$ , toiest . . . . .  $\frac{2}{3}x$ .

Droga uiechaná przez drugą osobę

$\frac{3}{4}$  -mili razy  $x$ , toiest . . . . .  $\frac{3}{4}x$ .

*Warunek.*  $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = 340$ .

*Przeráb:* (Przywiódtłszy ułómki do iednakowégó mianownika)

$$\frac{8}{12}x + \frac{9}{12}x = 340.$$

(Wykonáwłszy oznaczoné dodáwanie) . .  $\frac{17}{12}x = 340$ .

(Podzieliłszy przez 17) . . . . .  $\frac{1}{12}x = 20$ .

(Rozmnożyłszy przez 12) . . . . .  $1x = 240$ .

**Rozwiązanie.**  $x = 240$ . Godziny szukane.

Reszta iak wyżej.

*Inszé przykłady.* Jedna ze dwóch osób wieżdź 5 mil w sześciu godzinach, a druga wieżdź 6 mil w siedmiu godzinach. Oddalone są od siebie na mil 142.

Pospiech iazdy iednuy osoby, iest 6 mil w 5 godzinach, drugiuy 4 mile we trzech godzinach: odległość 152 mil.

70. Zadanie 5. Złodziey uciekając, 3 mile w 4 godzinach ubiegł. Pogón we 28 godzin po ucieczce za nim wystand, ubiegł 4 mile we 3 godzinach. Za iléż godzin złodziey będzie dogoniony?

*Arytmetycznie.* Złodziey ubiegł na godzinę  $\frac{3}{4}$  mili: więc we 28 godzin, ubiegł 28 razy  $\frac{3}{4}$  mili, toiest ubiegł 21 mil, nim pogón za nim wysła. Ta pogón ubiegł  $1\frac{1}{3}$  mili na godzinę, i zbliża się co godzina ku złodzieiowi tylé, ilá iest różnica  $\frac{3}{4}$  mili od  $1\frac{1}{3}$ , toiest zbliża się ku złodzieiowi summą  $\frac{1}{4}$ , i  $\frac{1}{3}$  mili, czyli  $\frac{7}{12}$  mili: więc w 12 godzinach zbliży się ku złodzieiowi na mil 7: a przeto tylé razy przez 12 godzin gonić złodzieia potrzeba, ilé razy 7 mil powtórzone czynią 21 mil: doydziemy zaś tego, dzieląc 21 przez 7, skąd wypadnie wieloráz 3: więc 3 razy przez 12 godzin, toiest przez 36 godzin gonić má pogón złodzieia, nim go dogoni. Złodziey zaś uciekał przez 28 godzin dłużej, toiest uciekał ze wszytkiem przez 64 godzin.

*Albo tak:* Pogón ubiegł na godzinę  $\frac{4}{3}$  mili, złodziey  $\frac{3}{4}$ , albo pogón  $\frac{1}{3}$  mili, a złodziey  $\frac{3}{4}$ : więc w iednakowym przeciągu czasu, tak się má droga ubiezoná od pogoni, do drogi ubiezonéy od złodzieia, iak 15 do 9: a zatém, i różnica tych dróg w iednym czasie ubiezonych mieć się będzie do drogi ubiezonéy od pogoni, iak 7 do 16, a do drogi ubiezonéy od złodzieia, iak 7 do 9. Aże ta różnica drogi na początku wyjazdu pogoni iest 21 mil, albo trzy razy 7 mil; więc téż i drogi ubiezone w iednym czasie od pogoni i od złodzieia, będą do siebie iak 3 razy 16, do 3 razy 9, albo iak 48 mil, do 27: i piérwszá z tych liczba 48 przewyższá drugá 27, tak iak w saméy rzeczy przewyższać powinna liczbą 21.

*Algebr:* Mian: Godziny pogoni . . . . .  $x$ .  
 Godziny ucieczki złodzieia . . . . .  $x + 28$ .  
 Droga ubiezoná od pogoni . . . . .  $\frac{4}{3}x$   
 Droga ubiezoná od złodzieia . . . . .  $\frac{3}{4}x + 21$ .

Waru-

Warunek.  $\frac{4}{3}x = \frac{3}{4}x + 21$ .

(Przywiódłszy ułamki do jednakowego mianownika)

$$\frac{1}{1} \frac{6}{2} x = \frac{1}{1} \frac{9}{2} x + 21.$$

(Odiąwszy  $\frac{9}{2}x$ )  $\frac{1}{1} \frac{6}{2} x = 21$ .

(Podzieliwszy przez 7)  $\frac{1}{1} \frac{6}{2} x = 3$ .

(Rozmnożywszy przez 12)  $1x = 36$ .

Rozwiązanie  $x = 36$ . Godziny pogoni.

$x + 28 = 64$ . Godziny ucieczki złodzieja.

$\frac{4}{3}x = 48$ . Droga ubieżona przez pogon.

$\frac{3}{4}x + 21 = 48$ . Droga ubieżona przez złodzieja.

*Inszé przykłady.* Dwa okręty idą ku sobie: jeden uchodzi 5 mil w 4 godzinach, drugi 4 mile w 5 godzinach: nim się znajdą pierwszy ryżsie 36 mil więcej, niż drugi. Ileż każdy z nich wyjdzie nim się znajdą, i jaką jest ich pierwsza odległość?

Kupuje kto pewną liczbę sukna iednego, i płaci 3 Cz. Zł. za 5 łokci. Kupuje tylż łokci i sukna drugiego, i płaci 4 Cz. Zł. za 7 łokci. Zapłacił 8 Cz. Zł. więcej za pierwszy, niż za drugi. Ileż było łokci?

Dwa Skażniki, czyli Indexy zegarka, godzinny i minutowy, zeszły się razém w godzinę np. południową; kiedyż znówu zedydą się razém?

Lubo to ostatnie Zagadnienie, tegoż jest co i dwa poprzedzające gatunku, że iednak Uczniowie mogliby tego nie postrzedz, przeto się tu tak wyłuszcza.

*Arytmetycznie.* Skażnik godzinny przechodzi w tym samym czasie od iednego podziału godzinnego, do drugiego następującego, w którym skażnik minutowy obchodzi całe koło, czyli 12 podziałów godzinnych: a zatém skażnik minutowy w równym czasie 12 razy tylé ubiega, ile skażnik godzinny. Różnica więc tych dwóch biegow, jest 11 razy tak wielką, iak bieg skażnika godzinnego.

A że droga ubieżona od skażnika minutowego (rachując ją od iednego spotkania się z skażnikiem godzinnym, do następującego) jest większą całym obwodém podziału, od drogi w równym czasie ubieżonéy od skażnika godzinnego; więc cały tén obwód podziału równa się drodze, którą przebiega skażnik godzinny od iednego spotkania się do drugiego następującego, wziętę razy 11. A zatém ta droga skażnika godzinnego czyni iedną część całego obwodu podziału, to jest w czasie ją rachując, czyni 5 minut pierwszych, 27 drugich, i coś więcej.

*Algabr.*



*Algebraicznie.* Wystawmy sobie koło, które obiegaia obadwa skażniki w zegarku podzielone na 12 równych części, z których każda wyraża czas godzinny.

*Mianowanie.* Droga ubieżona od skażnika godzinnego między iednym, i drugim następnem spotkaniem . . . . . x.

Droga ubieżona w tymże czasie od skażnika minutowego . . . . .  $12x$  albo  $x + 12$ .

*Warunek.*  $12x = x + 12$ .

*Przerabianie.*  $11x = 12$ .

$$1x = \frac{12}{11} = 1 \frac{1}{11}.$$

*Rozwiązanie.*  $x = 1 \frac{1}{11}$ . Droga ubieżona od skażnika godzinnego.

$12x = 12 \frac{12}{11} = 13 \frac{1}{11}$ . Droga ubieżona w iednymże czasie od skażnika minutowego.

$x + 12 = 1 \frac{1}{11} + 12 = 13 \frac{1}{11}$ . Drugie wyrażenie drogi ubieżony od skażnika minutowego.

71. Zadanie 6. Woda płynąca iednym kandałem może napełnić kádź, w którą wpływa 3 razy w 7 dniach: taż woda wypływając innym kandałem, może wypróżnić tę kádź 2 razy w 5 dniach. Otworzywszy obadwa té kandały, iléż czasu trzeba będzie do napełnienia kádzi? (przypuściwszy, że woda płynie iednostajnie w obudwóch kandałach.)

*Arytmetycznie.* Woda wpływająca do innéy kádzi 3 razy tak wielkiéy, iak kádź daná, napełniłaby 7mą iéy część we dniu iednym, a zatem napełniá w tym czasie  $\frac{3}{7}$  kádzi danéy. Taż woda, gdyby wypływała z kádzi dwa razy tak wielkiéy, wypróżniłaby piątą iéy część we dniu iednym, a zatem w tymże czasie wypróżni  $\frac{2}{5}$  kádzi danéy. Wiéc po skończonym dniu iednym płynienia, i wypłynienia, tylé wody zostanie w kádzi danéy, ilá iest różnica  $\frac{2}{5}$  od  $\frac{3}{7}$ , albo  $\frac{1 \frac{4}{5}}{35}$  od  $\frac{1}{5}$ , toiest zostanie  $\frac{1}{35}$  część kádzi, tą wodą przez dzień napełnioná. Wiéc po drugim dniu napełnią się  $\frac{2}{35}$  téyże kádzi i t. d. a za dni 35 napełnią się  $\frac{2}{35}$  téy kádzi, toiest całá kádź za dni 35 będzie napełnioná.

Albo tak: Ponieważ 35 iest to liczba, którą tak przez 5, iako i przez 7 bydz może podzieloną; wystawmy wiéc sobie tę kádź, iakoby podzieloną

na 35 równych części. Pierwszym kanałem płynąca woda w 7 dniach, napelniłaby 105 takich części, a w jednym dniu 15 części. Drugim kanałem wypływająca woda, w 5 dniach wypróżniłaby 70 takichże części, a w jednym dniu 14 części. Więc gdy razem wpływać, i wypływać woda będzie, zostanie iey w kadzi jedna tylko taká część. A że 35 takich części napelnią kádź całą; więc w 35 dniach będzie napelnioná.

*Algiebr:* Mian: Liczba dni szukaná . . . . .  $x$ .  
 Pierwszym kanałem napelniaią się w jednym  
 dniu  $\frac{3}{7}$  kadzi: więc w  $x$  dniach . . . . .  $\frac{3}{7}x$ .  
 Drugim kanałem wypływaia  $\frac{2}{5}$  kadzi w je-  
 dnym dniu: więc w  $x$  dniach . . . . .  $\frac{2}{5}x$

*Warunek.*  $\frac{3}{7}x - \frac{2}{5}x = 1$ .

*Przerób:* (Przywiódłszy ułómki do jednakowego mianownika)

$$\frac{3}{35}x - \frac{2}{35}x = 1.$$

(Wykonawszy oznaczone odejmowanie)  $\frac{1}{35}x = 1$ .

(Rozmnożywszy przez 35) . . . . .  $1x = 35$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 35$ . Liczba dni szukaná.  
 $\frac{3}{7}x = 15$ . Liczba tylu razy, iléby z pierwszego kanału  
 woda w 35 dniach kádź napelniła.  
 $\frac{2}{5}x = 14$ . Liczba tylu razy, iléby drugim kanałem woda  
 w 35 dniach kádź wypróżniła.

*Sprawdzenie:*  $\frac{3}{7}x - \frac{2}{5}x = 15 - 14 = 1$ .

*Insze przykłady.* Pierwszy kadt może kadt napelnić 7 razy w 8 dniach, drugi może ią wypróżnić 5 razy w 6 dniach. Iléż dni trzeba będzie do napelnienia kadzi, gdy woda obudwóma razem płynie kanałami?

Pewny kupiec zyskuje co rok  $\frac{1}{10}$  majątku swiego, który miał handel zaczynając, i wydaie co rok  $\frac{1}{5}$  tegoż majątku. Za iléż lat mieć będzie 2 razy tyle, ile miał na początku handlu?

72. Zadanie 7. Pewny rzemieślnik może zrobić robotę jedną w 12 dniach, a drugi może to samo zrobić w 6 dniach. Biorą razem między siebie tę robotę: za iléż dni mogą ią skończyć?

*Aryt.*

*Arytmetycznie.* Pierwszy zrobił za dzień  $\frac{1}{2}$  tej roboty, a drugi zrobił  $\frac{1}{6}$ : więc razem zrobią przez dzień  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ , albo  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ , czyli  $\frac{2}{3}$ , to jest  $\frac{2}{3}$  całej roboty: a zatem za cztery dni całą robotę skończą.

*Algebr. Mian:* Liczba dni szukana  $x$ .  
Część zrobiona przez rzemieślnika  
pierwszego  $\frac{1}{2}x$ .  
Część zrobiona przez drugiego  $\frac{1}{6}x$ .

*Warunek.*  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = 1$ .

*Przerób:* (Przywiódłszy ułamki do jednakowego mianownika)  
 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 1$ .  
(Wykonawszy oznaczone dodawanie)  $\frac{2}{3}x = 1$ .  
(Przywiódłszy do najprościejszych wyrazów)  $\frac{2}{3}x = 1$ .  
(Rozmnożywszy przez 3)  $2x = 3$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 1.5$ . Liczba dni szukana.  
 $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot 1.5 = \frac{3}{4}$ . Część zrobiona przez 1 wszego.  
 $\frac{1}{6}x = \frac{1}{6} \cdot 1.5 = \frac{1}{4}$ . Część zrobiona przez 2giego.

*Sprawdzenie.*  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ . Cała robota.

*Inszé przykłady.* Dwie robotników gromady kopią rów ieden: iedna gromada mogłaby skończyć tę robotę za dni 8, a drugą mniejszą daleko za dni 56. Za ileż dni wykopią obiedwie razem ten rów?

*Woda wchodzi do kadzi przez dwa kandy: ieden może ją napętnić w 12 godzinach, a drugi w 24 godzinach. Za ileż godzin obadwa razem kade napętnią?*

73. *Zadanie 8.* Miałtek osoby A, jest  $\frac{2}{3}$  majątku Osoby B: A, i B, zyskną po Zł. 12, a po tym zysku majątek A, będzie  $\frac{3}{4}$  majątku B.

*Arytmetycznie.* Aby majątek A, był iednostaynie  $\frac{2}{3}$  majątku B, trzebaby aby i zysk A, był  $\frac{2}{3}$  zysku B, to jest 8 Zł. Ale że A, zyskuje nie 8, ale 12 Zł. więc nad  $\frac{2}{3}$  zysku B, zyskuje ielzcze A, 4 Zł: té więc 4 Zł: to czynią, że A, po zysku nie má  $\frac{2}{3}$ , ale  $\frac{3}{4}$  majątku B, także po zysku: więc té 4 złote są w saméy rzeczy różnicą między  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{3}{4}$  majątku B, to jest, są  $\frac{1}{12}$  majątku B, B, tedy mieć będzie po zysku 12 razy 4 Zł. to jest 48 Zł.



1wszy Maiątek B . . . 36 Zł. Maiątek B, po zysku . . . 48. Zł.  
1wszy Maiątek A . . . 24 . . . Maiątek A, po zysku . . . 36.

*Algiebr:* 1wszy Maiątek B . . .  $x$ . Powtórny . . .  $x + 12$ .  
1wszy Maiątek A . . .  $\frac{2}{3}x$ . Powtórny . . .  $\frac{2}{3}x + 12$ .  
albo . . . . .  $\frac{2}{3}x + 9$ .

*Warunek.*  $\frac{2}{3}x + 9 = \frac{2}{3}x + 12$ .

*Przerób:* (Przywiódłszy ułamki do jednakowego mianownika)

$\frac{2}{3}x + 9 = \frac{2}{3}x + 12$ .  
(Odiąwszy  $\frac{2}{3}x$ ) . . . . .  $\frac{2}{3}x + 9 = 12$ .  
(Odiąwszy 9) . . . . .  $\frac{2}{3}x = 3$ .  
(Rozmnożywszy przez 12) . . . . .  $1x = 36$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 36$ . 1wszy maiątek B.  
Reszta iak wyżej.

*Inszé przykłady.* Maiątek A, iest  $\frac{2}{3}$  maiątku B: A, zyskuje na B, Zł. 12, które straciwszy B, má tylko  $\frac{2}{3}$  maiątku A.

Maiątek A, iest  $\frac{3}{4}$  maiątku B. A, zyskuje Zł. 8. B, zaś traci Zł. 12, i potem tyle má A, ile i B.

A, má Zł. 24. B, Zł. 18. Iléž má zyskać tak A, iak i B, aby po równym ich zysku, maiątek A, przechodził tylko  $\frac{1}{2}$  stą maiątek B.

A, i B, założyli się o Zł. 12, które iezeli A, wygrá; tedy u B, zostanie  $\frac{2}{3}$  maiątku A: iezeli zaś B, wygrá, tedy u B, zostanie  $\frac{3}{4}$  maiątku A.

Sposób postępowania w rozwiązywaniu tych wszystkich zagádnień wcale iest podobny temu, który wyłożyliśmy w Rozdziele poprzedzającym. (§. 6 i następ.)

74. Zadanie 9. A, i B, maig razem . . . . . 24 Zł.  
C, i D, maig razem . . . . . 24 Zł.

Maiątek C, iest  $\frac{2}{3}$  maiątku A.

Maiątek B, iest  $\frac{3}{4}$  maiątku D.

Fig. 18. *Przez rozumowanie.* Niech linie równe AB, CD, wystawią náin 24 Zł. Linie AX, BX, niech wystawią maiątki A, i B, a linie CY, DY, niech wystawią maiątki C, i D.

Ponieważ

Ponieważ maiątek C, powinién być  $\frac{2}{3}$  maiątku A; więc linią CY, powinna téż być  $\frac{2}{3}$  linii AX: toieś linią AX, powinna zawierać w sobie półtora razy linią CY: weźmy linią EB, równą połowie linii CD: będzie EX, zawierała w sobie półtora razy linią DY. A że BX, má tylko mieć w sobie  $\frac{3}{4}$  linii DY; więc tylé nie dostaie ieścze linii BX, aby była  $\frac{3}{4}$  linii DY, ilá ieś różnica  $\frac{3}{4}$  od  $\frac{3}{2}$  toieś nie dostaie ieý  $\frac{3}{4}$  linii DY. Że zaś dodałszy BE, do BX, ieś  $EX = \frac{3}{2} DY$ ; więc BE równá się  $\frac{3}{4} DY$ . A ponie-  
wáž BE, wystáwiá nám Zł. 12; więc i  $\frac{3}{4} DY$ , oznaczać będą Zł. 12.  $\frac{1}{4} DY$  oznaczy Zł. 4, a całá linią DY oznaczy Zł. 16.

Maiątek D	16 Zł.
C	8.
B	12.
A	12.

Algebr. Mian: Maiątek C	$x$ .
A	$\frac{3}{2}x$ .
B	$24 - \frac{3}{2}x$ .
D	$24 - x$ .

Drugie wyrażenie maiątku B.  $18 - \frac{3}{4}x$ .

Warunek.  $24 - \frac{3}{2}x = 18 - \frac{3}{4}x$ .

Przerábianie. (Przywiódłszy ułómki do iednakowégó mianownika)

$$24 - \frac{3}{2}x = 18 - \frac{3}{4}x.$$

$$\text{(Dodáwŝy } \frac{3}{4}x) \quad 24 = 18 + \frac{3}{4}x.$$

$$\text{(Odiáwŝy 18)} \quad 6 = \frac{3}{4}x.$$

$$\text{(Podzieliwŝy przez 3)} \quad 2 = \frac{1}{4}x.$$

$$\text{(Rozmnożywŝy przez 4)} \quad 8 = 1x.$$

Rozwiązanie.  $x = 8$ . Maiątek C.  
 $\frac{3}{2}x = 12$ . Maiątek A.  
 $24 - \frac{3}{2}x = 12$ . Maiątek B.  
 $24 - x = 16$ . Maiątek D.

Spráwdzenie. Maiątek B, ieś w saméy rzeczy  $\frac{3}{4}$  maiątku D.

Inŝe przykłady. A, i B, maia razem . . . 70. Zł.  
 C, i D, maia razem . . . 70.

Maiątek C, jest  $\frac{2}{3}$  majątku A.

Maiątek B, jest  $\frac{3}{4}$  majątku D.

A, i B, mają razem . . . . . 144. Zł.

C, i D, mają razem . . . . . 144. Zł.

Maiątek C, jest  $\frac{3}{4}$  majątku A.

Maiątek B, jest  $\frac{2}{3}$  majątku D.

75. Zadanie 10. Pewna osoba dała  $\frac{1}{3}$  majątku swiego na pięć procentu, albo na  $5\%$ , a pozostałe  $\frac{2}{3}$  tegoż majątku, dała na  $6\%$ . Bierze zaś całego procentu 17000 Zł. Jakż jest iły majątek?

*Arytmetycznie.* Gdyby ta osoba miała 300 Zł. dałaby była 100 Zł. na  $5\%$ , a 200 Zł. na  $6\%$ : procent z pierwszhey części byłby 5 Zł. a z drugiey 12 Zł: a ze wślyskiem 17 Zł. Że zaś odbiera w procencie 17000 Zł. to jest 1000 razy więcej, więc i kapitał iły był 1000 razy większy od 300 Zł. a zatem był 300000 Zł.

*Algiebr:* Mian: Maiątek téy osoby . . . . . x.

Część daná na  $5\%$  . . . . .  $\frac{1}{3}x$ .

Część daná na  $6\%$  . . . . .  $\frac{2}{3}x$ .

Procent od 1wśzey części . . . . .  $\frac{5}{300}x$ .

. . . . . od 2giey . . . . .  $\frac{12}{300}x$ .

*Warunek.*  $\frac{5}{300}x + \frac{12}{300}x = 17000$ .

*Przeráb:* (Wykonáwszy oznaczóné dodáwanie)  $\frac{17}{300}x = 17000$ .

(Podzieliwszy przez 17) . . . . .  $\frac{1}{300}x = 1000$ .

(Rozmnożywszy przez 300) . . . . .  $1x = 300000$ .

*Rozwiązanié.*  $x = 300000$ . Maiątek téy osoby.

$\frac{1}{3}x = 100000$ . Część tego majątku na  $5\%$ .

$\frac{2}{3}x = 200000$ . Część tego majątku na  $6\%$ .

$\frac{5}{300}x = 5000$ . Procent z pierwszhey części.

$\frac{12}{300}x = 12000$ . Procent z drugiey części.

$\frac{17}{300}x = 17000$ . Cały procent.

*Uwaga.* Można toż Zadanie rozwiązać i bez ułómków w ten sposób:

Ozna-



Oznaczmy majątek téy osoby przez liczbę, która tak przez 3, iak i przez 100 może być podzieloną np: przez 300x.

Będzie część pierwszą daną na 5% . . . . . 100x.  
 Procént od niéy . . . . . 5x.  
 Część drugą daną na 6% . . . . . 200x.  
 Procént od niéy . . . . . 12x.

Warunek.  $5x + 12x = 17000$ .

Przerabianie.  $17x = 17000$ .

$1x = 1000$ .

$300x = 300000$ . Majątek téy osoby, tén sam co wyżej.

Inszé przykłady. Pewná osoba dwoiaki handel prowadzi: w jedén włożyła  $\frac{2}{3}$  swégo majątku, w drugi  $\frac{1}{3}$  tegoż majątku. Z pierwszého handlu zyskuje 10%, a z drugiego zyskuje 12%. Ze wszystkiém zyskuje za rok 44800 złotych.

Pewná osoba wchodzi w troiaki handel: w jedén wkładá  $\frac{1}{4}$  swégo majątku, w drugi  $\frac{1}{2}$ , a w trzeci resztę tegoż majątku. Z pierwszého handlu zyskuje w rok 8%, z drugiego 12%, a z trzeciego 15%: ze wszystkiém zaś zyskuje 58800 Zł.

76. Zadanie 11. Pewná osoba dała  $\frac{2}{3}$  swégo majątku na 6%, a  $\frac{1}{3}$  na 8%. Z pierwszéy części toiest ze  $\frac{2}{3}$  swégo majątku, więcéy 4800 Zł. zyskuje niż z drugiey toiest z  $\frac{1}{3}$  majątku. Jakiz jest iéy majątek?

Arytmetycznie. Gdyby ta osoba miała tylko 300 Zł. tedy 200 dałaby na 6%, a 100 na 8%. Z pierwszéy więc części miałaby zysku roczného 12 Zł. a z drugiey 8 Zł: a zatém na każdych 300 Zł. zysk z pierwszéy części byłby 4 Zł. więkzy od zysku z drugiey części. A że z pierwszéy części więcéy 4800 Zł. zyskuje niż z drugiey toiest 4 razy 1200; więc téż i kapitał iéy będzie 300 razy 1200, toiest 360000 Zł.

Część majątku daną na 6% . . . . . 240000.  
 Część majątku daną na 8% . . . . . 120000.  
 Procént z pierwszéy części . . . . . 14400.  
 Procént z drugiey . . . . . 9600.

Różnica procéntów . . . . . 4800.

Algiebr:

*Algiebr:* Mian: Maiątek téy osoby . . . . .  $x$ .  
 Część iego daná na 6% . . . . .  $\frac{2}{3} x$ .  
 Część daná na 8% . . . . .  $\frac{1}{3} x$ .  
 Procént z piérwšzéy części . . .  $\frac{1}{300} x$   
 Procént z drugiéy części . . .  $\frac{8}{300} x$ .

*Warunek.*  $\frac{1}{300} x - \frac{8}{300} x = 4800$ .

*Przeráb:* (Wykonáwšzy oznaczone odeymowanie)  $\frac{1}{300} x = 4800$  -  
 (Podzieliwšzy przez 4) . . . . .  $\frac{1}{300} x = 1200$ .  
 (Rozmnożywšzy przez 300) . . . . .  $1x = 360000$ .  
 Réſzta iak wyžéy.

*Uwága.* Moſná i to Zadanié rozwiázac Algiebraicznie, nie uſywa-  
 iąc ułómków, ale oznaczaiąc maiątek téy osoby przez liczbę, którą tak przez  
 3, iak i przez 100 moſe byđ podzieloną, toieſt przez 300x.

*Inſze przykłady.* Pewná oſoba wchodzi we dwa handle: w jedén  
 kładzie  $\frac{2}{3}$  ſwégo maiątku, a w drugi  $\frac{1}{3}$ . W piérwſzym handlu zyskuje  $\frac{1}{4}$  ſwo-  
 iéy wkładki, w drugim zyskuje  $\frac{1}{5}$  ſwoiéy takſe wkładki. Zyskuje zaſ wiécéy  
 1200 Zł. w drugim handlu niſ w piérwſzym.

Inná oſoba má trzy handle: w jedén włoſzyła  $\frac{2}{3}$  ſwégo maiątku, w dru-  
 gi  $\frac{1}{3}$  tegoſ maiątku, a w trzeci reſztę. W piérwſzym handlu zyskuje 20%,  
 w drugim 15%, a w trzecim 8%. Zyskuje zaſ wiécéy 1300 Zł. w piérwſzym  
 handlu, niſ w drugim i trzecim razém.

77. Zadanié 12. Pewná oſoba wkładá we dwa handle 10000 Zł.  
 W jednym zyskuje 10%, a w drugim 12%. Zysk iéy w roku uroſt do 1080 Zł.  
 Iléſ włoſzyła w jedén, a ilé w drugi handel?

*Arytmetycznie.* Gdyby téń maiątek cały był włoſzony w piérwſzy  
 handel, zysk z niégo roczny byłby  $\frac{1}{10}$  tegoſ maiątku, toieſt 1000 Zł. A ſe  
 zysk wiékszy ieſt 80 Zł. od 1000 Zł: wiéc część tego maiątku włoſzyła ta  
 oſoba i w drugi handel. Na kaſdych 100 Zł. włoſzonych w drugi handel  
 zyskała ona 2 Zł. wiécéy, niſ na kaſdych 100 Zł. włoſzonych w piérwſzy  
 handel: a zaťém liczbę tych 100 Zł. znajdziemy, dzieląc 80 przez 2. wy-  
 padnie na wieloráz 40. Wiéc 40 ſet, toieſt 4000 Zł. włoſzyła ta oſoba w dru-  
 gi handel, a zaťém 6000 Zł. włoſzyła w piérwſzy.

*Algiebr:*

*Algebraicznie.* Część włożoną w handel, gdzie jest zysk  $12\%$  . . .  $x$ .  
 Drugą część włożoną w handel inny, gdzie  
 jest zysk  $10\%$  . . . . .  $10000 - x$ .  
 Zysk z pierwszey części . . . . .  $\frac{12}{100} x$ .  
 Zysk z drugiey . . . . .  $1000 - \frac{10}{100} x$ .

*Warunek.*  $\frac{12}{100} x + 1000 - \frac{10}{100} x = 1080$ .

*Przerób:* (Odiawszy 1000 po obu stronach)  $\frac{12}{100} x - \frac{10}{100} x = 80$ .  
 (Wykonawszy oznaczone odejmowanie) : .  $\frac{2}{100} x = 80$ .  
 (Podzieliwszy przez 2) . . . . .  $\frac{1}{100} x = 40$ .  
 (Rozmnożywszy przez 100) . . . . .  $1x = 4000$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 4000$ . Część majątku, z której procent  $12\%$ .  
 $10000 - x = 6000$ . Część, z której procent  $10\%$ .  
 $\frac{12}{100} x = 480$ . Zysk z pierwszey części.  
 $1000 - \frac{10}{100} x = 600$ . Zysk z drugiey części.

*Sprawdzenie.*  $480 + 600 = 1080$ .

*Uwaga.* Oznacząc przez  $100x$  część majątku przynoszącą  $12\%$  można było uchronić się ułomków.

*Inszé przykłady.* Pewną osobą dała część iedną majątku swego na  $7\%$ , a drugą część na  $5\%$ . Cały zaś majątek téj Osoby jest 80000 Zł. a cały procent wynosi na 4500.

Pewną osobą dzieli majątek swój między dwa handle. Z jednego zyskuje  $\frac{1}{3}$  wkładki swojej, z drugiego zyskuje  $\frac{1}{6}$  drugiey wkładki. Cały iey majątek jest 45000 Zł. a cały zysk 8400 Zł.

78. Zadanie 13. Pewną osobą 15000 Zł. włożyła we dwa handle. W jednym zyskuje  $9\%$ , a w drugim  $11\%$ . W roku zaś zyskała 250 Zł. więcej w drugim handlu niż w pierwszym.

*Arytmetycznie.* Gdyby ta osoba cały swój majątek była włożyła w drugi handel, byłaby z niego zyskała za rok Zł. 1650, więcej niż z pierwszego, w który nieby też była nie włożyła. A że tylko zyskuje więcej 250 Zł. z drugiego handlu, niż z pierwszego; więc w tém drugim mniemaniu zyskuje mniej 1400 Zł. niż w pierwszym.



Na każdym 100 Zł. włożonym raczemy w pierwszy niż w drugi handel, zysk téj osoby w pierwszym handlu powiększą się 9 Zł. a w drugim handlu zmniejszą się 11 Zł. co czyni różnicę w 20 Zł. na każdym stu złotych. Znajdziemy więc liczbę tych set włożonych w pierwszy handel, dzieląc całą różnicę 1400 Zł. przez 20. A że na wieloraz wypada 70; więc 70 set, to jest 7000 Zł. włożyła ta osoba w pierwszy handel, a zatem włożyła 8000 Zł. w handel drugi.

Część majątku w pierwszym handlu . . .	7000 Zł.
„ „ „ „ w drugim „ „ „ „ „	8000.
Zysk w drugim handlu „ „ „ „ „	880.
„ „ w pierwszym „ „ „ „ „	630.

Różnica . . . . . 250.

*Algiebr. Mian:* Część w pierwszy handel włożoną . . . . .  $x$ .  
 „ „ w drugi . . . . .  $15000 - x$ .  
 Zysk w pierwszym . . . . .  $\frac{9}{100} x$ .  
 „ „ w drugim . . . . .  $1650 - \frac{11}{100} x$ .

Różnica zysków . . . . .  $1650 - \frac{2}{100} x$ .

*Warunek.*  $1650 - \frac{2}{100} x = 250$ .

*Przerób:* (Dodawszy  $\frac{2}{100} x$ ) . . . . .  $1650 = 250 + \frac{2}{100} x$ .  
 (Odiąwszy 250) . . . . .  $1400 = \frac{2}{100} x$ .  
 (Podzieliwszy przez 20) . . . . .  $70 = \frac{1}{100} x$ .  
 Różniższywszy przez 100)  $7000 = 1x$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 7000$ . Część włożoną w pierwszy handel.  
 Reszta rozwiązania iak wyżej.

*Inszé przykłady.* Pewna osoba kupuje 120 łokci materji we dwóch różnych gatunkach. Jedney z tych materji má 3 łokcie za dwa cz. Zł. a drugiey má 4 łokcie za 3 Cz. Zł. Płaci zaś 12 Cz. Zł. za łokcie wszystkiej pierwszěj materji więcéy niż za wszystkie łokcie drugiey materji.

Na obicie pokoiów bierze kto 144 łokcie dwoiakiego gatunku płótna. Szerokość iednego iest na 1 łokieć i  $\frac{2}{3}$ , a szerokość drugiego na 1 łokieć, i  $\frac{3}{4}$ . Drugiego gatunku łokci więcéy iest 47 kwadratowych niż pierwszego.

79. Zadanie 14. Pewna osoba dzieli swój majątek między dwa handele: w jednym zyskuje 12%, a w drugim 9%. Włożyła zaś 5000 Zł. więcej w pierwszy handel niż w drugi, a w zysku całym odbiera za rok 2280 Zł. Trzeba znaleźć część ię majątku włożonego w pierwszy i w drugi handel.

*Arytmetycznie.* Gdyby ta osoba nie miała tylko te 5000 Zł. które-  
mu więcej włożyła w pierwszy handel niż w drugi; tedy w rok byłaby zys-  
kała 50 razy 12 Zł. toieft 600 Zł: a że zyskała 2280 Zł. więc zyskała  
więcej 1680 Zł. niżby była zyskała, nie mając tylko 5000 Zł. Oprócz tych  
5000 Zł. ile fet ta osoba kładzie w pierwszy handel, tylé ich téż kładzie i  
w drugi handel, a za obadwa razem sta Zł. jedno w pierwszy, a drugié  
włożoné w drugi handel zyskuje razem 21 Zł. Więc tę liczbę fet Zł. wło-  
żonych w drugi handel znajdziemy, dzieląc 1680 przez 21. Że zaś na  
wieloraz wypada 80; więc ta osoba włożyła w drugi handel 80 fet Zł. toieft  
8000 Zł a w pierwszy handel włożyła 5000 więcej, toieft 13000 Zł.

Część majątku włożoná w 1wszy handel . . . . .	13000 Zł.
Drugá część włożoná w 2gi handel . . . . .	8000.
Zysk z pierwszego handlu . . . . .	1560.
Zysk z drugiego handlu . . . . .	720.

Summa zysków . . . . . 2280.

*Algebr. Mian.* Część włożoná w 2gi handel . . . . .  $x$ .  
Część włożoná w 1wszy handel . . . . .  $x + 5000$ .  
Zysk z drugiego handlu . . . . .  $\frac{9}{100} x$ .  
Zysk z pierwszego handlu . . . . .  $\frac{12}{100} x + 600$ .

*Warunek.*  $\frac{9}{100} x + \frac{12}{100} x + 600 = 2280$ .

*Przerábianie.* (Odiáwfszy 600) . . . . .  $\frac{9}{100} x + \frac{12}{100} x = 1680$ .  
(Dodáwfszy ułómki) . . . . .  $\frac{21}{100} x = 1680$ .  
(Podzieliwfszy przez 21) . . . . .  $\frac{1}{100} x = 80$ .  
(Rozmnożywfszy przez 100) . . . . .  $1x = 8000$ .  
Reszta iak wyžéy.

*Inszé przykłady.* Pewná osoba daie iedną summę na 8%, a drugą  
większą 4000 Zł. od pierwszész na 6%. Procentu razem z obudwóch summ má  
1920 Zł.

Pełną osobą stawia mur, którego wysokość wszędzie jest jednakowa, a grubość jednej części, na łokieć  $1\frac{1}{2}$ , a drugiej na łokieć  $1\frac{3}{4}$ . Więc zaś jest na 24 łokcie wzdłuż tego drugiego muru, niż pierwszego: a biorąc tylko wysokość na 1 łokieć; bryłowość tego całego muru jest 227 łokci kubicznych. Jakż będzie długość muru, pierwszy i drugi szerokości?

80. Zadanie 15. Kupiec pewny z kapitału włożonego w jeden handel zyskuje  $13\frac{2}{3}\%$ , a z innego kapitału w drugi handel włożonego zyskuje  $9\%$ . Więc zaś 8000 Zł. włożył w pierwszy handel niż w drugi, a zysk tego roczny z pierwszego handlu większy jest 1440 Zł. niż zysk roczny z drugiego handlu.

*Arytmetycznie.* Gdyby ten kupiec miał tylko 8000 Zł. i tę włożył w pierwszy handel; tedyby w nim zyskał więcej 1040 Zł. niż w drugim, w któryby nic nie włożył. A że różnica zysków, w tych dwóch handlach jest większa 400 Zł. od różnicy mniemaney; więc ten kupiec wchodzi i w drugi handel.

Oprócz 8000 Zł. włożonych w handel pierwszy, na każdym stu złotych włożonych tak w handel pierwszy jak i drugi zyskuje ten kupiec więcej 4 Zł. z pierwszego handlu, niż z drugiego, a cały zysków różnica wynosząca na 400 Zł. pochodzi z tej różnicy 4 Zł. tyle razy powtórzonej, ile jest set złotych włożonych w handel drugi. Znajdziemy więc tę liczbę set, dzieląc 400 przez 4: wypadnie na wieloraz 100: a zatem sto razy 100 Zł. włożył ten kupiec w drugi handel, więc włożył weni Zł. 10000.

Kapitał włożony w pierwszy handel . . .	18000 Zł.
Kapitał włożony w drugi handel . . . . .	10000.
Zysk z pierwszego handlu . . . . .	2340 Zł.
Zysk z drugiego handlu . . . . .	900.

Różnica zysków . . 1440.

<i>Algebr.</i> Mian: Część majątku w 2gim handlu . . .	$x$ .
. . . . . w 1wszym . . . . .	$x + 8000$ .
Zysk na drugim handlu . . . . .	$\frac{13}{100} x$ .
. . . na pierwszym . . . . .	$\frac{9}{100} x + 1040$ .

Różnica tych zysków . . . .  $\frac{4}{100} x + 1040$ .

*Warunek.*  $\frac{4}{100} x + 1040 = 1440$ .



Przerób: (Odiąwszy 1040) . . . .  $\frac{5}{100} x = 400.$   
 (Podzieliwszy przez 4) . . .  $\frac{1}{400} x = 100.$   
 (Rozmnożywszy przez 100)  $1x = 10000.$   
 Reszta iak wyżej.

Inszé przykłady. Pewná osoba dała iedną sumnę na 8%, a drugą większą 12000 złotych od piérwšej na 6%. Zyskuje zaś w procencie więcej 150 Zł. z piérwšej summy niż z drugiej.

Każé kto kopac rów w pewnéj długości na łokcie rachowané, i płaci 100 Zł. za 12 łokci roboty. Każé znówu kopac inny rów szérszy lub głębszy od piérwszego, i płaci 100 Zł. za 8 łokci roboty, a tén drugi rów má 40 łokci wdłuż więcej niż piérwszy: zapłacił za całą robotę około drugiego rowu więcej 1000 Zł. niż za całą robotę około piérwszego rowu.

81. Zadanié 16. Przypnié kto służe, i obiecué mu na rok, albo na 12 miesięcy Cz: Zł: 36, i suknie. Po skonczonych 7 miesiącach sługa się odprawnie, i odbiera w zapłacie Cz: Zł. 16, i nad to jeszcze suknie. Tylé mu się téż w saméj rzeczy należało. Trzeba teraz dójść iak wysoko mu były suknie oszacowané.

Arytmetycznie. Za 7 miesięcy służby należało się temu słudze  $\frac{7}{12}$  rocznych załug ugodzonych, toiest 21 Cz: Zł. i  $\frac{7}{12}$  taxy sukien. Wiéc suknie oszacowané są w 5 Cz: Zł: i nad to w  $\frac{7}{12}$  całej ich taxy: a zatém  $\frac{5}{12}$  całej téy taxy czynią 5 Cz: Zł: a  $\frac{1}{12}$  téy taxy uczyni 1 Cz: Zł. Suknie więc na rok dané, oszacowané są w 12 Cz: Zł.

Algiebr: Mian: Taxa sukien . . . .  $x.$   
 Załugi roczné . . .  $36 + x.$   
 Załugi 7 miesięcy . .  $21 + \frac{7}{12} x.$

Warunek.  $16 + x = 21 + \frac{7}{12} x.$

Przerábianie. (Odiąwszy 16) . . . .  $x = 5 + \frac{7}{12} x.$   
 (Odiąwszy  $\frac{7}{12} x$ ) . . .  $\frac{5}{12} x = 5.$   
 (Podzieliwszy przez 5)  $\frac{1}{12} x = 1.$   
 (Rozmnożywszy przez 12)  $1x = 12.$

*Rozwiązanie.*  $x = 12$ . Taxa Sukién.

$36 + x = 48$ . Zaslugi roczné.

$21 + \frac{7}{12}x = 28$ . Zaslugi 7 miesięcy.

$16 + x = 28$ . Tyle tén fluga odebrał w zaslugach za 7 miesięcy.

*Uwaga.* Mając wzgląd sprawiedliwy na to, iż fuknie były przez 7 miesięcy zażywane i przyszarzane, i otaxowawszy je tylko w  $\frac{7}{12}$  początkowego szacunku; niechby tén fluga odebrał, w zaslugach za 7 miesięcy 23 Cz: Zł: i fuknie. Ponieważ mu się należało 21 Cz: Zł: w pieniądzech, a  $\frac{7}{12}$  fukién; więc gdy mu się daie 23 Cz: Zł: otaxowano  $\frac{2}{12}$ , albo  $\frac{1}{6}$  fukién w 2 Cz: Zł: a zatem całe fuknie kosztowały z początku 12 Cz: Zł.

*Inszé przykłady.* Należytość flugi roczná, jest 30 Cz: Zł: i fuknie. Po ośmiu miesiącach odbiera w zaslugach 17 Cz: Zł: i fuknie otaxowane bez względu na to, że były zażywane.

Należytość flugi roczná jest 32 Cz: Zł: i fuknie. Po 9 miesiącach odbiera w zaslugach 27 Cz: Zł: i fuknie otaxowane z względem na ich przytarcie.

82. Zadanie 17. Pewny kupiec powiększał co rok czwartą częśćią swój majątek, wyłaczyszy z niego 800 Cz: Zł: na roczny wydatek. Na końcu dwóch lat tén majątek jego powiększył się 9000 Cz: Zł. Jakiż był majątek jego pierwiastkowy?

*Arytmetycznie.* Gdyby tén kupiec nic nie wydawał; tedy na końcu pierwszego roku powiększyłby  $\frac{1}{4}$  częśćią majątek swój pierwiastkowy, to jest miałby  $\frac{5}{4}$  tegoż majątku. Na końcu drugiego roku majątek jego byłby znowu powiększony  $\frac{1}{4}$  częśćią tychże  $\frac{5}{4}$ , to jest byłby powiększony  $\frac{5}{16}$  pierwiastkowego majątku: a zatem na końcu drugiego roku powiększenie majątku tego kupca byłoby sumą  $\frac{1}{4}$  i  $\frac{5}{16}$ , to jest  $\frac{9}{16}$  tegoż pierwiastkowego majątku.

Na tych 800 Cz: Zł. które w początku roku pierwszego wyłaczył kupiec na wydatki, byłby przez dwa lata zarobił  $\frac{9}{16}$  tychże 800 Cz: Zł: to jest byłby zarobił 450 Cz: Zł: i miałby 1250 Cz: Zł: a na tych 800 Cz: Zł: które wyłaczył w początku drugiego roku także na wydatki, byłby zarobił  $\frac{1}{4}$  tychże 800 Cz: Zł: to jest 200 Cz: Zł: i miałby 1000 Cz: Zł. Więc z przy czyny tego wyłączania kapitał jego zmniejszył się 2250 Cz: Zł: na końcu lat dwóch.

Gdyby

Gdy tedy od  $\frac{9}{16}$  pierwiastkowego majątku tego kupca odeymiemy 2250 Cz: Zł: zostanie się jeszcze 9000 Cz: Zł: podług warunku: a zatem przed tém zmniejszeniem  $\frac{9}{16}$  pierwiastkowego jego majątku czyniły więcej 2250 Cz: złotemi; to jest czyniły 11250 Cz: Zł. Więc  $\frac{1}{16}$  tegoż majątku czyni  $\frac{1}{9}$  część Cz: Zł: 11250, to jest Cz: Zł: 1250: a zatem cały pierwiastkowy majątek był 16 razy tak wielki, to jest wynosił na 20000 Cz: Zł:

*Algebraicznie.* Majątek pierwiastkowy kupca . . .  $x$ .  
 Majątek po wyłączonych pierwszy raz  
     800 Cz: Zł. . . . .  $x - 800$ .  
 Zysk pierwszego roku . . . . .  $\frac{1}{4}x - 200$ .  
 Majątek na końcu 1 wszego roku . . .  $\frac{5}{4}x - 1000$ .  
 Majątek po wyłączonych drugi raz  
     800 czerwonych złotych . . . . .  $\frac{5}{4}x - 1800$ .  
 Zysk drugiego roku . . . . .  $\frac{5}{16}x - 450$ .  
 Majątek na końcu drugiego roku . . .  $\frac{25}{16}x - 2250$ .  
 Powiększenie majątku przez 2 lata  $\frac{9}{16}x - 2250$ .

*Warunek.*  $\frac{9}{16}x - 2250 = 9000$ .

*Przerób:* (Dodawszy 2250) . . . . .  $\frac{9}{16}x = 11250$ .

(Podzieliwszy przez 9) . . . . .  $\frac{1}{16}x = 1250$ .

(Rozmnożywszy przez 16)  $1x = 20000$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 20000$ . Majątek pierwiastkowy.  
 $x - 800 = 19200$ . Majątek po odjętych 1 wszy raz 800 Cz: Zł.  
 $\frac{1}{4}x - 200 = 4800$ . Zysk pierwszego roku.  
 $\frac{5}{4}x - 1000 = 24000$ . Majątek na końcu 1 go roku.  
 $\frac{5}{4}x - 1800 = 23200$ . Majątek po odjętych 2gi raz 800 Cz: Zł.  
 $\frac{5}{16}x - 450 = 5800$ . Zysk drugiego roku.  
 $\frac{25}{16}x - 2250 = 29000$ . Majątek na końcu 2go roku.  
 $\frac{9}{16}x - 2250 = 9000$ . Powiększenie majątku przez dwa lata, takie, jakie być powinno.

*Inszé przykłady.* Pewny kupiec powiększa  $\frac{1}{5}$  częścią przez rok swój majątek, wyłączywszy 1250 Zł. na wydatki roczné. Na końcu 3 lat powiększył 3640 złotemi pierwiastkowy swój majątek.

Pewny



Pewny kupiec powiększał  $\frac{2}{7}$  przez rok swój majątek, wyłączając 2401 Zł. na początku każdego roku. Po 4 latach skończonych majątek jego powiększony został 43680 Zł. Ileż miał przed 4 laty?

83. Zadanie 18. Pewny kupiec miał 5120 Cz. Zł. i wkładał je w handel, na którym powiększał corocznie swój majątek  $\frac{1}{4}$  onego częścią, wyłączając na początku każdego roku sumę jednakową służącą na wydatki. Po skończonych 4 latach majątek jego powiększył się 1845 cz. złotemi. Ileż wyłączał na roczny wydatek.

Arytmetycznie. Gdyby ten kupiec nic nie wydawał, tedy ponieważ w handel wkładał, naprzód:

5120 Cz. Zł.	
Zysk jego w pierwszym roku byłby	1280.
Majątek na końcu pierwszego roku	6400.
Zysk drugiego roku	1600.
Majątek na końcu drugiego roku	8000.
Zysk trzeciego roku	2000.
Majątek na końcu trzeciego roku	10000.
Zysk czwartego roku	2500.
Majątek na końcu czwartego roku	12500.
Powiększenie majątku w 4 latach byłoby	7380.
Aże to powiększenie jest tylko	1845.
Więc mniejsze jest, niż gdyby nic nie wydawał	
i różnica ta jest	5535.

To zmniejszenie pochodzi z wyłączania corocznego pewnej a jednakowej summy na wydatki.

Summa którą wyłączył na początku czwartego roku nie była w handlu tegoż roku. Gdyby zaś była, byłby ją na końcu tego czwartego roku powiększył  $\frac{1}{4}$  częścią: a zatem miałby  $\frac{4}{4}$  i  $\frac{1}{4}$  onéjże, to jest  $\frac{5}{4}$ . Więc zmniejszenie na końcu tego roku pochodzące z wyłączenia summy na wydatki tegoż roku, jest  $\frac{5}{4}$  téżże summy.

Podobnie i summa wyłączona na początku 3ciego roku, zamieniłaby się na końcu tego 3ciego roku wraz z zyskiem na  $\frac{4}{4}$  téżże summy, a na końcu czwartego roku byłaby  $\frac{5}{4}$  tychże  $\frac{5}{4}$ , to jest  $\frac{25}{16}$  téżże summy. Więc zmniejszenie pochodzące z wyłączenia summy na wydatki 3ciego roku, jest  $\frac{25}{16}$  téżże summy.

Tak

Tak też i zmniejszenie pochodzące z wyłączenia summy na wydatki drugiego roku jest  $\frac{1}{4}$  z  $\frac{2}{5}$ , czyli  $\frac{1}{10}$  téż summy.

Nakoniec zmniejszenie pochodzące z wyłączenia summy na wydatki pierwszego roku jest  $\frac{1}{4}$  z  $\frac{1}{5}$ , czyli  $\frac{1}{20}$  téż summy.

Zmniejszenie tedy całe pochodzące z tych 4 sum wyłączonych następuje na wydatki 4 lat, równa się wydatkowi rocznemu tyle razy więcej, ile wyraża summa ułamków  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{20}$ , to jest (przywiodłszy te ułamki do jednakowego mianownika) równa się summie  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$ , które to ułamki dodane czynią sumę  $\frac{18}{10}$ .

Więc  $\frac{18}{10}$  rocznego wydatku wyrównywią 5535 Cz. Zł. które ni mniej miał kupiec na końcu lat czterech, niż gdyby był nie wyłączał na roczne wydatki: a zatem  $\frac{18}{10}$  tego wydatku będzie znaczyć mniej 1845 razy, niż 5535 Cz. Zł. to jest będzie znaczyć 3 Cz. Zł. cały zaś roczny wydatek będzie 255 razy większy, to jest będzie 768 Cz. Zł.

Iwzły majątek tego kupca	5120 Cz. Zł.
Wyłączywszy w 1szym roku 768 Cz. Zł.	4352.
Zysk 1wzłego roku	1088.
Majątek na końcu pierwszego roku	5440.
Wyłączywszy tyléż co wyżej	4672.
Zysk 2go roku	1168.
Majątek na końcu 2go roku	5840.
Wyłączywszy tyléż co wyżej	5072.
Zysk 3go roku	1268.
Majątek na końcu 3go roku	6340.
Wyłączywszy tyléż co wyżej	5572.
Zysk 4go roku	1393.
Majątek na końcu 4go roku	6965.
Majątek na początku 1wzłego roku	5120.
Różnica, czyli powiększenie tego majątku	1845.

Algebr. Mian. Wydatek roczny	x.
Majątek zmniejszony przez x	5120 — x.
Zysk pierwszego roku	1280 — $\frac{1}{4}x$ .
Majątek na końcu 1wzłego roku	6400 — $\frac{1}{4}x$ .
Majątek ten zmniejszony przez x	6400 — $\frac{1}{4}x$ .
Zysk 2gięgo roku	1600 — $\frac{1}{10}x$ .

N

Majątek

Maiątek na końcu 2-giego roku . . . . .	8000	—	$\frac{4}{5}x$ .
Maiątek ten zmniejszony przez $x$ . . . . .	8000	—	$\frac{4}{5}x$ .
Zysk 3-ciego roku . . . . .	2000	—	$\frac{6}{5}x$ .
Maiątek na końcu 3-ciego roku . . . . .	10000	—	$\frac{3}{5}x$ .
Maiątek ten zmniejszony przez $x$ . . . . .	10000	—	$\frac{3}{5}x$ .
Zysk 4-tego roku . . . . .	2500	—	$\frac{3}{5}x$ .
Maiątek na końcu 4-tego roku . . . . .	12500	—	$\frac{1}{2}x$ .
Powiększenie całe majątku . . . . .	7380	—	$\frac{1}{2}x$ .

Warunek.  $7380 - \frac{1}{2}x = 1845$ ,

Przerób: (Dodawszy  $\frac{1}{2}x$ ) . . . . .  $7380 = 1845 + \frac{1}{2}x$ .  
(Odiąwszy 1845) . . . . .  $5535 = \frac{1}{2}x$ .  
(Podzieliwszy przez 1845) . . . . .  $3 = \frac{1}{2}x$ .  
(Rozmnożywszy przez 256) . . . . .  $768 = 1x$ .  
Reszta jak wyżej,

**Uwaga.** Do rozwiązania podobnych Zadań trzeba przysposobiać Uczniów przez przykłady prostiejsze, w któreby mniejszą liczba lat wchodziła.

**Przykłady.** Pewny kupiec ma 30000 Zł. i powiększa je co rok  $\frac{1}{5}$  części, wyłączonej na początku każdego roku pewną i jednakową sumę na wydatki. Po skończonych 2 latach majątek jego powiększył się 1650 Zł.

Zachowuje kto sobie sumę pewną na wydatki jednego roku wysłuchując: daie zaś 16400 Zł. na procent 5% mając w myśl co rok jednakową sumę wydawać, i tę potem wyłączać na początku drugiego i trzeciego roku. Drugi raz taką sumę wyłączonej, nic mu się nie zostaje. Jakiż jest ta summa?

Inna osoba wyłączonej na roczne wydatki pewną sumę, daie 25220 Zł. na procent 5%. Wyłącza potem taką sumę iako i pierwej na początku każdego roku, i po skończonych 4 latach, nic się jej nie zostaje.

Inna znowu osoba podobnie sobie postępując, daie 689620 Zł. na procent 5%, i po skończonych 5 latach nic się jej nie zostaje.

84 Zadanie 19. Pewny kupiec powiększa  $\frac{1}{5}$  części corocznie swój majątek, wyłącza 2700 Zł. na wydatki każdego roku. Na końcu 3 lat mieć będzie dwa razy tyle, ile miał na początku.

**Arytmetyczne.** Gdyby ten kupiec nic na wydatki nie wyłączał; tedy na końcu piątego roku majątek jego byłby powiększony trzecią częścią; i z tem



I z tem powiększeniem miałby  $\frac{4}{3}$  pierwszego majątku. Na końcu drugiego roku powiększyłby znowu  $\frac{1}{3}$  częścią té  $\frac{4}{3}$ , i miałby  $\frac{4}{3}$  tych  $\frac{4}{3}$ , to jest miałby  $\frac{16}{9}$  pierwszego majątku. Na końcu trzeciego roku miałby  $\frac{4}{3}$  tych  $\frac{16}{9}$ , to jest miałby  $\frac{64}{27}$  pierwszego majątku. Ale że na końcu trzeciego roku má tylko tyle dwoie pierwszego majątku, to jest  $\frac{2}{3}$ ; więc má mniej  $\frac{10}{27}$ . A to zmniejszenie ślad pochodzi, że co rok wyłączają pewną i jednakową sumę na wydatki.

Té 2700 Zł. które kupiec wyłączyć na początku trzeciego roku byłoby mu przyniosły za rok zysk 900 Zł: więc przez ich wyłączenie kapitał jego zmniejszył się 3600 Zł. na końcu tego trzeciego roku.

Podobnie summa wyłączona na początku drugiego roku nie była w handlu przez 2 lata, a zmniejszenie ślad pochodzące jest  $\frac{16}{9}$  téż summy, to jest 4800 Zł.

Summa znowu wyłączona na początku pierwszego roku nie była w handlu przez 3 lata, a zmniejszenie ślad pochodzące jest  $\frac{64}{27}$  téż summy, to jest 6400 Zł.

Więc zmniejszenie pochodzące z tych trzech wyłączeń jest summa 3600, 4800, 6400, to jest 14800 Zł.

Więc  $\frac{1}{27}$  pierwszego majątku czynią 14800 Zł. a zatem  $\frac{1}{27}$  tego majątku czyni 1480 Zł.

Cały zaś pierwszy majątek będzie 27 razy tak wielki, to jest będzie

Wylączywszy 2700 Zł.	39960 Zł.
Zysk pierwszego roku	37260.
Majątek na końcu 1go roku	12420.
Wylączywszy 2700 Zł.	49680.
Zysk 2go roku	46980.
Majątek na końcu drugiego roku	15660.
Wylączywszy 2700 Zł.	62640.
Zysk 3go roku	59940.
Majątek na końcu 3go roku	19980.
	79920.

Który to ostatni majątek jest 2 razy tak wielki, jak pierwszy.

*Algiebr:* Mian: Pierwszy majątek . . . . . x.  
Po pierwszym wyłączeniu . . . . . x — 2700.  
Zysk 1go roku . . . . .  $\frac{1}{27}x$  — 900.  
Mająk.

Maiątek na końcu 1 wżęgo roku	$\frac{4}{31}x = 3600.$
Po drugiem wyłączeniu	$\frac{4}{3}x = 6300.$
Zysk 2go roku	$\frac{4}{9}x = 2100.$
Maiątek na końcu 2go roku	$\frac{16}{9}x = 8400.$
Po trzeciem wyłączeniu	$\frac{16}{9}x = 11100.$
Zysk 3go roku	$\frac{16}{27}x = 3700.$
Maiątek na końcu 3go roku	$\frac{64}{27}x = 14800.$

Warunek.  $\frac{64}{27}x - 14800 = 2x.$

Przerabianie. (Dodawczy 14800)  $\frac{64}{27}x = 2x + 14800.$

{ Obróciwszy  $2x$  na ułomek z je.  
dnakowym pierwżęmu mianowni-  
kiem. }  $\frac{64}{27}x = \frac{54}{27}x + 14800.$

(Odiawczy  $\frac{54}{27}x$ )  $\frac{10}{27}x = 14800.$

(Podzieliwszy przez 10)  $\frac{1}{27}x = 1480.$

(Rozmnożywszy przez 27)  $x = 39960.$

Reszta iak wyżę w Arytmetycznćm postępowaniu.

Uwaga. Oznaczywszy z początku zaraz maiątek pićrwszy tego kupca przez liczbę, którą 27 zupełnie dzieli np. przez  $27x$ , uchronilibyśmy się byli wyrazów ułomkowych w mianowaniu. Tę uwagę przyśłófować należy, i do infzych podobnych Zadanić.

Infzć przykłady. Pewny kupiec powiękşzć  $\frac{1}{4}$  częścią corocznie swój maiątek, wyćaciwszy 28928 Zł. na początku każdego roku. Po skoniczonych 4 latach podwoić swój pićrwszy maiątek.

Pewnć osoba wyćaczć 131000 co rok z maićtku swćgo, zysknie zaś z reszty na kociu każdego roku po 10%. Po skoniczonych trzech latach maićtek pićrwszy powiękşzył się  $\frac{1}{2}$  częścią.

85. Zadanić 20. Pewny chłopćk przedćł przez 3 targi, pewnć liczbę korcy zboża. Na pićrwszym targu przedćł połowę tego zboża, i nad to pół korca: na drugim targu przedćł połowę reszty zboża, i nad to znouu pół korca: na trzecim targu przedćł połowę tćy ostatnićy reszty i nad to pół korca, i wszystko wyprzedćł. Ilćż miał do przedania korcy zboża?

Arytm.

*Artytmetycznie.* Ponieważ ten chłopiec na trzecim targu przedawczy połowę resztującego zboża, i nad to pół korca, wszystko wyprzedził; więc tę pół korca było drugą połową resztującego zboża: a zatem na trzecim targu miał korzec i do przedania.

Ten korzec i pół korca przedane na drugim targu, czyniły razem połowę tego zboża, które miał na drugim targu: więc na drugim targu miał 3 korce do przedania.

Tę trzy korce i pół korca przedane na pierwszym targu, czyniły razem połowę zboża, którą miał na pierwszym targu: więc na pierwszym targu miał 7 korcy do przedania.

Pierwszą liczbą korcy do przedania . . . . . 7. korcy.

Gdyby był przedał połowę, zostałoby się . . . . .  $3\frac{1}{2}$ .

Ale że nad to przedał  $\frac{1}{2}$  korca, więc zostało . . . . . 3.

Gdyby był na drugim targu przedał połowę, zostałoby się  $1\frac{1}{2}$ .

Ale że nad to przedał  $\frac{1}{2}$  korca; więc się zostało . . . . . 1.

Gdyby był na 3cim targu przedał połowę, zostałoby się  $\frac{1}{2}$ .

Ale że przedał  $\frac{1}{2}$  korca nad to; więc się zostało . . . . . 0.

*Algebra:* Pierwszą liczbą korcy . . . . .  $x$ .

Gdyby był przedał połowę, zostałoby się . . . . .  $\frac{1}{2}x$ .

Że przedał nad to pół korca; więc się zostało . . . . .  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .

Gdyby był na drugim targu przedał połowę, zostałoby się  $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ .

Że przedał nad to pół korca; więc się zostało . . . . .  $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ .

Gdyby był na 3cim targu przedał połowę, zostałoby się  $\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$ .

Że przedał nad to pół korca; więc się zostało . . . . .  $\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$ .

*Warunek.*  $\frac{1}{8}x - \frac{7}{8} = 0$ .

*Przerób:* (Dodawczy  $\frac{7}{8}$  po obu stronach)  $\frac{1}{8}x = \frac{7}{8}$ .

(Rozmnożywszy przez 8) . . .  $1x = 7$ .

Reszta rozwiązania jak wyżej.

*Inszé przykłady.* Liczba targów jest 4, 5, 6, 7, i t. d.

Liczba korcy po ostatnim targu pozostających

stałych . . . . . 1, 3, 7, 15, i t. d.

Niechby znowu na każdym targu nad  $\frac{2}{3}$  liczby korcy przedano  $\frac{2}{3}$  korca, niechby zaś liczba targów była . . . . . 3, 4, 5, 6, 7, i t. d.

a liczba korcy po ostatnim targu pozostających . . . . . 0, 2, 8, 26, 80, i t. d.



Nakoniec niechby nad  $\frac{2}{3}$  liczby korcy przesłano nad to na każdym targu  $\frac{3}{4}$  korca; a niech liczba korcy pozostałych, po ostatnim targu, będzie jedna z tych . . . 0, 3, 15, 63, i t. d.

86. Zadanie 21. Pewny ojcze dzieli majątek pomiędzy dzieci swoich, w sposób następujący: najstarszemu wyznacza 1000 Cz: Zł: i  $\frac{1}{2}$  część resztującego majątku. Drugiemu wyznacza 2000 Cz: Zł: i  $\frac{1}{2}$  część pozostałego jeszcze bez rozrządzenia majątku. Trzeciemu wyznacza 3000 Cz: Zł: i  $\frac{1}{2}$  część reszty i t. d. powiększając zawsze 1000 Cz: Zł: część pierwszą, mającą się dostać to ród młodszemu dziećciu.

Ten majątek również był tym sposobem między wszystkie dzieci podzielony. Jakże był? ile się na jedno dziecię dostało? i ile było dzieci?

**Arytmetycznie.** Gdyby ostatnie dziecię, prócz pierwszej części udziału na nie przypadającego brało nad to i część drugą; tedyby zostało się jeszcze  $\frac{2}{3}$  tej drugiej części do dzielenia, a zatem całe dziedzictwo oycy nie byłoby podzielone. Sama tedy część pierwsza majątku dostaje się ostatniemu dziećciu w podziale. A ta część zamykać w sobie będzie tyle razy 1000 Cz: Zł: ile ich oznacza liczba, ostatnie dziecię w porządku starzeństwa wyrażająca to jest, będzie ta część tyle razy zawierała 1000 Czerw: Złotych, ile jest dzieci.

Pierwszą część majątku przypadającą na dziecię przedostatnie zamknie w sobie 1000 Cz: Zł: tyle razy, ile jest dzieci mniej jednym, a wraz z drugą częścią zamknie tyle razy 1000 Cz: Zł: ile jest dzieci: a zatem drugą część dostającą się przedostatniemu dziećciu będzie 1000 Cz: Zł.

Tę 1000 Cz: Zł: które czynią drugą część majątku dostającego się przedostatniemu dziećciu, są  $\frac{2}{3}$  częścią pozostałego po podziale poprzedzających dzieci majątku oycy: a zatem to, co się ostatniemu dziećciu dostało, jest  $\frac{2}{3}$  tegoż majątku pozostałego. A ponieważ  $\frac{2}{3}$  czyni 1000 Czerw: Złot: więc  $\frac{2}{3}$  uczynią 4 razy tyle, to jest 4000 Cz: Zł. Liczba tedy dzieci jest 4. Dział na każde dziecię przypadający 4000 Czerw: Zł: a cały majątek oycy 16000 Cz: Zł.

Cały majątek oycy	16000 Cz: Zł.
Pierwszą część udziału najstarszego dziećcia	1000.
Zostać się	15000.
Drugą część przypadającą na toż dziecię	3000.
Zostać się	12000.

Pierwszą

Pierwsza część 2go dziecięcia . . . . .	2000. Cz: Zł:
Zostało się . . . . .	10000.
Drugą część tegoż . . . . .	2000.
Zostało się . . . . .	8000.
Pierwsza część 3go dziecięcia . . . . .	3000.
Zostało się . . . . .	5000.
Drugą część tegoż . . . . .	1000.
Zostało się . . . . .	4000.
Pierwsza część 4go dziecięcia . . . . .	4000.
Drugą część tegoż . . . . .	0.

Części więc przypadające na 12 dzieci są

Na pierwsze 1000 i 3000 Cz: Zł: to jest . . .	4000. Cz: Zł:
Na drugie 2000 i 2000 Cz: Zł: to jest . . .	4000.
Na trzecie 3000 i 1000 Cz: Zł: to jest . . .	4000.
Na czwarte 4000 i 0 Cz: Zł: to jest . . .	4000.

*Algibra: Alian: Cały majątek ojca . . . . . x.*

Tenże po wzięciu 1 wizerzy części działu przez

1 wizerzy dziecię . . . . .	$x - 1000.$
Drugą część tegoż dziecięcia . . . . .	$\frac{1}{2}x - 200.$
Dział cały pierwszego dziecięcia . . . . .	$\frac{1}{2}x + 800.$
Reszta majątku ojca . . . . .	$\frac{1}{2}x - 800.$
Po wzięciu 1 wizerzy części działu przez 2gie dziecię . . . . .	$\frac{2}{5}x - 2800.$
Drugą część drugiego dziecięcia . . . . .	$\frac{2}{5}x - 560.$
Dział cały 2go dziecięcia . . . . .	$\frac{4}{5}x + 1440.$

Ponieważ zaś wszystkie dzieci mają być równo podzielone; więc w szczególności tyle się dostaje pierwszemu, ile i drugiemu, a zatem:

$$\text{Warunek } \frac{1}{2}x + 800 = \frac{4}{5}x + 1440.$$

$$\text{Przerób: (Odiąwszy 800) } \dots \frac{1}{2}x = \frac{4}{5}x + 640,$$

(Przywiódłszy ułamki do

$$\text{jednakowego mianownika } \frac{1}{2}x = \frac{4}{5}x + 640.$$

$$\text{(Odiąwszy } \frac{4}{5}x) \dots \frac{1}{2}x = 640.$$

$$\text{(Rozmnożywszy przez 25) } 1x = 16000.$$

Reszta jak wyżej w postępowaniu Arytmetycznem.

*Infzł*

*Inszé przykłady. Piérwszé części dziātu przypadaiącego na dzieci rośną iak liczby 1000, 2000, 3000, i t. d. Drugié części są  $\frac{1}{6}$ , albo  $\frac{1}{7}$ , albo  $\frac{1}{8}$  i t. d. reszty pozostały majątku oycy.*

*Niech znówu piérwszé części tego dziātu rośną iak liczby 1000, 3000, 5000, toiest niech ta piérwsza część następnego każdego dziecięcia będzie 2000, np. Zł. większą niż poprzedzającego: drugie zaś części niech będą  $\frac{2}{7}$ , albo  $\frac{2}{8}$ , albo  $\frac{2}{9}$  i t. d. reszt pozostałych. Albo ieszcze niech piérwszé części dziātu iak 1000, 4000, 7000 i t. d. toiest niech ta piérwsza część dziātu każdego następnego dziecięcia będzie 3000 np. Zł. większą niż poprzedzającego, a drugie części niech będą  $\frac{3}{11}$ ,  $\frac{3}{16}$ ,  $\frac{3}{19}$ , i t. d. reszt pozostałych.*

87. Zadanie 22. Szerokość pewnego prostokąta jest  $\frac{2}{3}$  długości tegoż prostokąta. Gdy zaś do każdego boku dodamy po 1 stopie, powierzchnia tego prostokąta powiększy się 21 stopami kwadratowymi.

Fig. 19. Niech ABCD, będzie prostokąt, którego szukamy, a którego szerokość BC, jest  $\frac{2}{3}$  długości AB, albo DC. Niech ieszcze będzie takim ten prostokąt, aby dodawszy do każdego z boków jego długość jednakową BE, DF, oznaczającą 1 stopę, zrobił się inny prostokąt AEGF, którego powierzchnia większaby była 21 stop. kw. od powierzchni tego i go prostokąta.

Powiększeniem powierzchni szukanego prostokąta jest Węgielnica (Norma) BEGFDC, którą można podzielić na dwa prostokąty BI, DH, i na kwadrat CG. Ten kwadrat ma 1 stopę kwadratową: więc dwa prostokąty BI, DH, mieć powinny obadwa razem 20 stop kw. Ponieważ zaś szerokość ich jest 1 stopa, a długość piérwszego BI, jest  $\frac{2}{3}$  długości drugiego DH; więc piérwszy może być podzielony na 2, a drugi na 3 prostokąty mniejsze jednakowey długości i szerokości: więc 5 tych równych prostokątów powierzchnia zawierać będzie 20 stop kw: a zatem ieden z nich ma w powierzchni  $\frac{4}{5}$  część 20 stop kw. toiest 4 stopy kwadr. Ze zaś szerokość każdego z nich jest na 1 stopę; więc długość każdego z nich będzie na 4 stopy. Piérwszy tedy prostokąt BI, zawierający w sobie 2 takie prostokąciiki ma 8 stop kwadr. toiest 1 stopę szerokości, a 8 długości; a drugi DH, zawierający w sobie 3 takie prostokąciiki ma 12 stop kw. toiest 1 stopę szerokości, a 12 długości. A że prostokąt szukany ma za szerokość, długość piérwszego z tych prostokącików, a za długość, długość 2go z tych prostokącików; więc szerokość jego będzie 8 stop, a długość 12 stop.



Szerokość prostokąta szukanego	8 stóp kw.
Długość	12.
Powierzchnia	96.
Szerokość 2go prostokąta	9.
Długość	13.
Powierzchnia	117 stóp kw.
Różnica w powierzchniach	21 stóp kw.

<i>Algebra. Mian:</i> Długość szukanego prostokąta	$x$ .
Szerokość	$\frac{2}{3} x$ .
Powierzchnia	$\frac{2}{3} xx$ .
Długość 2go prostokąta	$x + 1$ .
Szerokość	$\frac{2}{3} x + 1$ .
Powierzchnia	$\frac{2}{3} xx + \frac{2}{3} x + 1$ .
Różnica w powierzchniach	$\frac{2}{3} x + 1$ .

*Warunek.*  $\frac{2}{3} x + 1 = 21$ .

*Przerób:* (Odiąwszy 1)  $\frac{2}{3} x = 20$ .  
 (Podzieliwszy przez  $\frac{2}{3}$ )  $x = 30$ .  
 (Rozmnożywszy przez 3)  $1x = 12$ .  
 Reszta rozwiązania iak wyżej.

*Uwaga.* Oznaczywszy szerokość pierwszego prostokąta przez  $2x$ , długość przez  $3x$ , można było uchronić się ułomków.

*Inszé przykłady.* Szerokość prostokąta jest  $\frac{3}{4}$  długości jego: przydawszy zaś 1 stopę do téj długości, a 2 stopy do szerokości; powierzchnia tego prostokąta powiększy się 35 stóp kw.

Szerokość prostokąta jest  $\frac{2}{3}$  jego długości: przydawszy zaś jedną stopę do téj szerokości, a odjęwszy 2 stopy od długości; powierzchnia jego powiększy się 31 stóp kw.

Szerokość prostokąta jest  $\frac{3}{5}$  jego długości: ujęwszy zaś 2 stopy téj szerokości, a przydawszy 1 stopę długości, powierzchnia jego zmniejszy się 37 stóp kw.

Szerokość prostokąta jest  $\frac{4}{5}$  jego długości: odjęwszy zaś po 1 stopie od każdego boku, powierzchnia zmniejszona będzie 32 stóp kw.

88. Zadanie 23. Osoba A, dała osobie B, połowę tyle, ile inż miała osoba B. Osoba znowu B, dała wzajemnie Osobie A, połowę tyle, ile się u A, zostało. Gdy te osoby dwa razy jeszcze podobne zamiany powtórzyły, znalazło się tak u A, iak i u B, po Zł. 729.

*Arytmetycznie.* Za każdą razą takię zamiany majątek tak Osoby A, iak i B, powiększa się połową tego, ile się znajduje u A, lub u B; to jest staie się ten majątek  $\frac{3}{2}$  siebie samęgo, albo co na jedno wychodzi, powiększenie t go majątku jest trzecią częścią tegoż majątku wraz z powiększeniem.

Zatém idzie, iż, ponieważ A, má na końcu 729 Zł. wzięwszy od B, trzecią część tych 729 Zł. to jest 243; więc przed tym wzięciem było tylko u A, Zł. 486. Ze zaś B, także má na końcu 729 Zł. dawszy dla A, Zł. 243; więc przed tym daniem było u B, 972 Zł. B, má 972, wzięwszy od A trzecią część to jest 324: więc przed tym wzięciem było u B, tylko 648. Ze zaś u A, po tym daniu 324 Zł. zostało 486; więc przed tym było 810.

Tymże sposobem można dojść stanu poprzedzającego majątków tych osób, aż się naostatek dojdzie do pierwotnego ich majątku. Co następująca tablica przed oczy wystawia dostatecznie,

Majątek . . . . . A.	Majątek . . . . . B.
Na końcu . . . . . 729 Zł.	Na końcu . . . . . 729 Zł.
Przed wzięciem . . 243 . . 486.	Przed daniem . . 243 . . 972.
Przed daniem . . 324 . . 810.	Przed wzięciem . . 324 . . 648.
Przed wzięciem . . 270 . . 540.	Przed daniem . . 270 . . 918.
Przed daniem . . 306 . . 846.	Przed wzięciem . . 306 . . 612.
Przed wzięciem . . 282 . . 564.	Przed daniem . . 282 . . 894.
Przed daniem . . 298 . . 862.	Przed wzięciem . . 298 . . 596.

Osoba A, miała więc na początku złotych . . . . . 862. [ Osoba B, miała na początku złotych . . . . . 596.

*Algebraicznie. Mianowanie,* Majątek pierwszy B. . . . .  $x$ .  
Majątek pierwszy A. . . . .  $1458 - x$ .

B, odebrałszy  $\frac{1}{2} x$  má . . . . .  $\frac{3}{2} x$ .  
A, dawszy  $\frac{1}{2} x$  má . . . . .  $1458 - \frac{3}{2} x$ .  
B, dawszy  $729 - \frac{3}{2} x$ , má . . . . .  $\frac{3}{2} x - 729$ .

A, ode-

$$\begin{aligned}
 A, \text{ odebrałszy } 729 - \frac{3}{4}x, \text{ má } & 2187 - \frac{9}{4}x. \\
 B, \text{ odebrałszy } \frac{9}{8}x - 364\frac{1}{2}, \text{ má } & \frac{27}{8}x - 1093\frac{1}{2}. \\
 A, \text{ dąłszy } \frac{9}{8}x - 364\frac{1}{2}, \text{ má } & 2551\frac{1}{2} - \frac{27}{8}x. \\
 B, \text{ dąłszy } 1275\frac{3}{4} - \frac{27}{8}x, \text{ má } & \frac{81}{8}x - 2369\frac{3}{4}. \\
 A, \text{ odebrałszy } 1275\frac{3}{4} - \frac{27}{8}x, \text{ má } & 3827\frac{1}{4} - \frac{81}{8}x. \\
 B, \text{ odebrałszy } \frac{81}{8}x - 1184\frac{5}{8}, \text{ má } & \frac{243}{8}x - 3553\frac{7}{8}. \\
 A, \text{ dąłszy } \frac{81}{8}x - 1184\frac{5}{8}, \text{ má } & 5011\frac{7}{8} - \frac{243}{8}x. \\
 B, \text{ dąłszy } 2505\frac{1}{2} - \frac{243}{8}x, \text{ má } & \frac{729}{4}x - 6059\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Warunek.  $\frac{729}{4}x - 6059\frac{1}{2} = 729.$

Przerabianie. (Dodawszy  $6059\frac{1}{2}$ )  $\frac{729}{4}x = 6788\frac{1}{2}.$

(Obróciwszy na ułamek drugą stronę)

$$\frac{729}{4}x = 10862\frac{1}{2}.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 729.

$$\frac{x}{4} = 14\frac{9}{8}.$$

(Rozmnożywszy wyrazy drugiego ułamka przez 4)

$$\frac{x}{4} = 59\frac{5}{8}.$$

(Rozmnożywszy przez 64)  $1x = 596.$

Maiątek rwałszy B	596.
Maiątek rwałszy A	862.
B, wziąłszy 298, má	894.
A, dąłszy 298, má	564.
B, dąłszy 282, má	612.
A, wziąłszy 282, má	846.
B, wziąłszy 306, má	918.
A, dąłszy 306, má	540.
B, dąłszy 270, má	648.
A, wziąłszy 270, má	810.
B, wziąłszy 324, má	972.
A, dąłszy 324, má	486.
B, dąłszy 243, má	729.
A, wziąłszy 243, má	729.

Inszé przykłady. Każda z tych dwóch osób daie iedną drugiej trzecią część tego co tamta już má, i czyniąc to wzajemnie po dwa lub trzy razy; będzie mieć na końcu tak iedna iak i druga, w pierwszym razie po Zł. 256, w drugim po Zł. 4096.



Niechby znowu dawały sobie po czwartej części podobnie jak wyżej, i niechby to po dwa lub trzy razy czyniły, a na końcu miały po Zł. 625 w pierwszym razie, a w drugim zaś po Zł. 15625.

89. Zadanie 24. Majątek osoby A, zawiera w sobie majątek osoby B, tyle razy, ile i majątek Osoby B, zawiera w sobie majątek Osoby A: z tem wszystkiem B, ma więcej 2 Zł. niż A.

Uwaga. Wyrażenie dzielenia majątku A, przez majątek B, może być oznaczone przez ułamek, któregooby licznikiem był pierwszy majątek, a mianownikiem drugi. Toż mówić i o wyrażeniu majątku B, podzielonego przez majątek A.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Algebr. Mian:} & \text{Majątek A} & \dots \dots \dots x. \\
 & \text{Majątek B} & \dots \dots \dots x + 2. \\
 & \text{Wyrażenie majątku B, podzielone-} & \\
 & \text{go przez majątek A} & \dots \dots \dots \frac{x + 2}{x} \\
 & \text{Wyrażenie majątku A, podzielone-} & \\
 & \text{go przez majątek B} & \dots \dots \dots \frac{x}{x + 2}
 \end{array}$$

$$\text{Warunek. } \frac{x + 2}{x} = \frac{x}{x + 2}$$

Przerob: (Przywiódłszy obadwa ułamki, do jednakowego mianownika)  $\frac{xx + 4x + 4}{xx + 2x} = \frac{xx}{xx + 2x}$

(Rozmnożywszy obie strony przez  $xx + 2x$ , albo co na jedno wychodzi, oznaczywszy równość dwóch liczników, których mianowniki są jednakowe)

$$xx + 4x + 4 = xx.$$

$$(\text{Odiąwszy } xx) \dots \dots \dots 4x + 4 = 0.$$

$$(\text{Odiąwszy } 4) \dots \dots \dots 4x = -4.$$

$$(\text{Podzieliwszy przez } 4) \dots \dots \dots 1x = -1.$$

Rozwią-

*Rozwiązanie.*  $x = -1$ . Maiątek osoby A, która w samej rzeczy winna 1 Zł.

$x + 2 = +1$ . Maiątek istotny Osoby B.

$$\frac{x + 2}{x} = \frac{+1}{-1} = -1. \text{ Wieloraz z maiątku B, po-}$$

dzielonego przez maiątek A.

$$\frac{x}{x + 2} = \frac{-1}{+1} = -1. \text{ Wieloraz z maiątku A, po-}$$

dzielonego przez maiątek B.

*Uwaga.* Wyrażenie to  $\frac{+1}{-1}$  wzięliśmy za równé temu  $-1$ .

Jakoż liczba dzieląca przez wieloraz rozmnożoną, równa się zawsze liczbie podzielnej: a zatem wieloraz taki tu być powinien, aby rozmnożywszy go przez  $-1$  wypadło  $+1$ . A że tylko  $-1$  jest takim wielorazem, który przez  $+1$  rozmnożywszy wypadnie  $-1$ ; więc wieloraz ten jest  $-1$ .

Podobnie można by dowieść, że wyrażenie to  $\frac{-1}{-1}$  równa się temu  $+1$ .

Skąd można tę regułę dzielenia ustanowić względem znaków: że gdy dwa wyrazy mają przed sobą znak iednakowy; tedy wieloraz jest *przydatny*, gdy zaś dwa wyrazy mają znaki odmiennie, wtedy wieloraz jest *wieźny*. I tak:

$$\frac{+4}{+2} = +2; \frac{-4}{-2} = +2; \frac{+4}{-2} = -2; \frac{-4}{+2} = -2.$$

*Inszé przykłady.* Niech będzie takie iak wyżej zadanie z tą różnicą, że B, má więćcy 2000, albo 4000, albo 6000 i t. d. Zł. niż A.

## R O Z D Z I A Ł III.

*Zagadnienia, w które więcej wchodzi, niż jeden wyraz  
niewiadomy.*

**W** przykładach Rozdziałów poprzedzających jednego tylko używaliśmy wyrazu niewiadomego, lubo kilku częstokroć ilości nam nie znanych szukaliśmy. Te przykłady tak były zawsze dobięrané, że używszy w mianowaniu warunków jednego tylko znaku wystawiającego ilość niewiadomą, i téy ilości doszedłszy, już tém samém doysść łatwo mogliśmy i innych ilości nieświadomych jako zawiśliych od pierwszých.

Roztrząsnąwszy dobrze Zadanie, i zważywszy podane warunki, można obeysć się często w mianowaniu, jednym tylko znakiem ilości niewiadomey: ale w wielu okolicznościach, chcąc na jednym prześłać znaku, stałby się jeszcze zawiśłym sposób postępowania, albo dla wyrazów ułamkowych, albo dla ilości ujemnych, których uszrzedz się można, wprowadziwszy w mianowanie więcej niż jeden znak niewiadomy.

To pomnożenie znaków ilości nieświadomych nie powinno powiększyć rzecznóm trudności, gdy już przez tylé poprzedzających przykładów wprawili się w działania z jednym takowym znakiem. Idąc za powszechnym zwyczajem, używać będziemy ostatnich abecadła liter, iak np.  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , do wyrażenia ilości nieświadomych.

## 90. Zadanie I.

3 łokcie sukna i 5 łokci materji kosztowało . . . . . 83 Zł.

3 łokcie tegoż sukna i 7 łokci téżże materji kosztowało 97.

*Ileż kosztował każdy łokieć sukna i każdy łokieć materji?*

*Arytmetycznie.* W drugim razie tylé kupiło się sukna łokci co i w pierwszym, ale materji kupiło się 2 łokcie więcej niż w pierwszym, i dało się téż drugim razem więcej 14 Zł niż pierwszym: więc té dwa łokcie materji kosztowały Zł. 14, a zatem 1 łokieć kosztował Zł. 7.



Za 5 tedy łokci materji przypadnie Zł. 35; a że te 5 łokci materji wraz z trzema łokciami sukna kosztowały Zł. 83; więc 3 łokcie sukna kosztowały 83 Zł. mniej 35 złotych, to jest kosztowały 48 Zł: a zatem 1 łokieć sukna kosztował 16 Zł.

Cena 1go łokcia sukna . . . . .	16 Zł.
Cena 1go łokcia materji . . . . .	7.
Cena 3ch łokci sukna . . . . .	48.
Cena 5 łokci materji . . . . .	35.

---

Summa . . . . . 83.

Cena trzech łokci sukna . . . . .	48 Zł.
Cena 7 łokci materji . . . . .	49.

---

Summa . . . . . 97 Zł.

*Algebraicznie.*

Cena 1go łokcia sukna . . . . .	$x$ .
Cena 3ch łokci . . . . .	$3x$ .
Cena 1go łokcia materji . . . . .	$y$ .
Cena 5ciu łokci . . . . .	$5y$ .
Cena 7miu łokci . . . . .	$7y$ .

*Warunek.*  $\begin{cases} 3x + 7y = 97. \\ 3x + 5y = 83. \end{cases}$

*Przerabianie.* (Od każdej strony pierwszego równania odjąwszy odpowiadającą stronę drugiego równania)  $2y = 14$ .

(Podzieliwszy przez 2) . . . . .  $1y = 7$

Położywszy tę wartość  $y$ , w któremkolwiek z pierwszych dwóch równań, np. w pierwszym będzie:  $3x + 49 = 97$ .

(Odiąwszy 49) . . . . .  $3x = 48$ .

(Podzieliwszy przez 3)  $1x = 16$ .

Cena 1go łokcia sukna . . . . . 16 Zł.

Cena 1go łokcia materji . . . . . 7. Tak iak téż znaleźliśmy, pśępując Arytmetycznie.

Można także to Zadanie rozwiązać, używając tylko jednego znaku niewiadomego.

Cena 1go łokcia materyi . . . . .	y.
Cena 7min łokci . . . . .	7y.
Cena 5cin łokci . . . . .	5y.
Cena 3ch łokci sukna . . . . .	97 — 7y.
albo . . . . .	83 — 5y.

Warunek. 83 — 5y = 97 — 7y.

(Dodawszy 7y) . . . . . 83 + 2y = 97.

(Odiawszy 87) . . . . . 2y = 14.

(Podzieliwszy przez 2) . . . . . y = 7.

97 — 7y = 97 — 49 = 48.      Cena 3ch łokci sukna.

97 — 7y =      48 = 16.

3      3

Cena 1go łokcia sukna iak wyżéy.

*Infzél przykłady.* Kupnie kto pewną liczbę łokci sukna po 15 Zł. i pewną liczbę łokci materyi po 8 Zł. Inną razą kupnie znou pewną liczbę łokci sukna, po tężé co wyżéy cenie, i pewną liczbę łokci materyi po Zł. 6. Piérwszą razą należało się za wszystko Zł. 147, a drugą razą Zł. 129. Iléż było łokci sukna i materyi w piérwszym i drugim razie?

*Arytmetycznie.* Piérwszą razą zapłaciło się więcéy 2 Zł. tylé razy, ilé było łokci materyi. A że się zapłaciło piérwszą razą więcéy 18 Zł. niż drugą; więc 2 Zł. wzięté tylé razy, ilé było łokci materyi czynią Zł. 18, a 1 Zł. wzięty tylé razy, ilé było łokci materyi czyni Zł. 9. Było więc łokci 9 materyi.

Reszta rozwiązanía nie powinna mieć żadnéy trudności, po wyluszczeniu piérwszégó, przykładu.

Użył kto iedną razą 12 mężczyzn, a 8 kobiet, do pewnéy roboty, i zapłacił za tę robotę ze wszystkiém gr. 328.

Inną razą, użył 12 mężczyzn, a 11 kobiet do pewnéy roboty, płacąc tylé każdéy osobie co i piérwéy: zapłacił zaś ze wszystkiém gr. 370.

Jakąż była płaca mężczyzny, a iaká kobiety?

Zaciągá kto pewną liczbę robotników po gr. 15, a inną liczbę po gr. 12. Zapłacił wszystkim gr. 423.

Drugą

Drugą razą zaciągną też samą co piérwéy liczbę robotników po gr. 15, i tyle znowu robotników po gr. 14, ile ich niał piérwéy po gr. 12: płaci zaś wśzyfikim gr. 471.

Ileż było za każdą razą robotników?

91. Zadanie 2. Pewny kupiec bierze za 15 łokci sukna w zamianę Zł. 120, i dziesięć łokci innégó sukna.

Inną razą bierze za 15 łokci piérwszégó sukna Zł. 150, i 8 łokci drugiégo sukna.

Jakąż cena była piérwszégó, a iaká 2go sukna?

Arytmetycznie.. Tén kupiec wziął w zamianie piérwszą razą więcéy 2 łokcie drugiégo sukna niż drugą: w piéniédzach zaś wziął 30 Zł. więcéy drugą razą. Wiéc cena dwóch łokci sukna gatunku drugiégo iest 30 Zł: a zatém cena 1 łokcia iest 15 Zł. Cena 10 łokci iest 150 Zł. a summa téy ceny, i 120 Zł. iest 270 Zł. A że ta summa 270 Zł wyrównywa cenie 15 łokci sukna gatunku piérwszégó; wiéc za 1 łokieć gatunku piérwszégó przypadało Zł. 18.

Algebr. Mian: Cena łokcia gatunku 1go . . .  $x$ .  
Cena łokcia gatunku 2go . . .  $y$ .  
Cena 15 łokci gatunku 1go 15 $x$ .  
Cena 10 łokci gatunku 2go 10 $y$ .  
Cena 8 łokci gatunku 2go . 8 $y$ .

Warunek.  $\begin{cases} 15x = 120 + 10y \\ 15x = 150 + 8y \end{cases}$

Przerábianie. (Porównáwśzy dwie wáżności 15 $x$ )

$$120 + 10y = 150 + 8y$$

$$(\text{Odiáwśzy } 120) \dots\dots\dots 10y = 30 + 8y$$

$$(\text{Odiáwśzy } 8y) \dots\dots\dots 2y = 30$$

$$(\text{Podzieliwśzy przez } 2) \dots\dots\dots 1y = 15$$

$$120 + 10y = 120 + 150 = 270$$

$$15x = 270$$

$$1x = 18$$

Rozwiązanie. 1 $x$  = 18. Cena łokcia 1go gatunku.

1 $y$  = 15. Cena łokcia 2go gatunku.



$$\begin{array}{l} 15x = 270. \text{ Cena } 15 \text{ łokci } 190 \text{ gatunku.} \\ 120 + 10y = 270. \left\{ \begin{array}{l} \text{Cena tychże } 15 \text{ łokci inaczey wyra-} \\ \text{żoná.} \end{array} \right. \\ 150 + 8y = 270. \end{array}$$

*Uwaga.* Można było i w tém Zadaniu podobnie iak w pierwszym nie używać tylko iednego znaku niewiadomego.

*Inszé przykłady.* Pewny rzemieślnik ochrania 12 Zł. w każdy dzień, w który robi: wydaie zaś 5 Zł. w każdy dzień, w który nie robi. Po niejakim czasie zebrat 238 Zł.

Ima razą tyle dni co i pierwszą robił, tyle też złotych co i pierwszy codziennie sobie ochraniając: nie robił przez tyle także dni, co i pierwszy, a w każdy taki dzień wydawał po Zł. 8. W takim zaś, iak wyżej przeciągu czasu ochronił sobie Zł. 208 tylko.

Ilż dni robił, i ilż nie robił?

Inny rzemieślnik ochraniał sobie 14 Zł. w każdy dzień, w który robi, wydaie zaś Zł. 8 w każdy dzień, w który nie robi. Po niejakim czasie ochronił sobie Zł. 324.

Innym razém robił mniej 3 dniami, a nie robił więcej 3 dniami, zamiast iednak 8 Zł. wydawał Zł. 10 w każdy dzień, w który nie robił. Ochronił sobie w przeciągu tego samego co wyżej czasu Zł. 228.

*Uwaga.* W przykładach poprzedzających spółczynniki iednéy z dwóch niewiadomych ilości wchodzących we dwa równania składające warunek, były iednakowé, i przeto można było z łatwością przywieść zadanie do iednéy niewiadomey ilości. Do tego celu zmierzają się i we wszystkich Zagadnieniach, mających więcej niż iedną ilość niewiadomą: i tym końcem czynią się działania, przez które iednéy z ilości niewiadomych równe dają się spółczynniki.

92. Zadanie 3.

$$\begin{array}{l} 3 \text{ łokcie sukna i } 5 \text{ łokci materji kosztowało} \quad \quad \quad \text{Zł. } 83. \\ 6 \text{ łokci tegoż sukna, i } 7 \text{ łokci téżże materji kosztowało} \quad \quad \quad 145. \end{array}$$

Jakież jest cena iednego łokcia sukna, i iednego łokcia materji?

*Arytmetycznie.* Gdyby w pierwszym razie tyle się kupiło łokci sukna co i w drugim, toieś łokci 6, a materji także tyle drugie, toieś łokci 10; tedy warunek pierwszy odmiénilby się w następujący:

6 Łokci sukna, 10 łokci materji kosztowało Zł. 166.

A że w drugim razie 6 łokci sukna, i 7 łokci materji kosztowało Zł. 145.

Więc 3 łokcie materji kosztowały Zł. 21, a zatem 1 łokieć kosztował Zł. 7.

5 tedy łokci materji kosztowało Zł. 35, a 3 łokcie sukna kosztowało Zł. 83 mniéj 35 Zł. to jest kosztowały Zł. 48: a zatem 1 łokieć kosztował Zł. 16.

<i>Algebra: Mian:</i>	Cena łokcia sukna	. . . . .	$x$ .
	Cena łokcia materji	. . . . .	$y$ .
	Cena 3 łokci sukna	. . . . .	$3x$ .
	Cena 5 łokci materji	. . . . .	$5y$ .
	Cena 6 łokci sukna	. . . . .	$6x$ .
	Cena 7 łokci materji	. . . . .	$7y$ .

*Warunek.*  $\begin{cases} 3x + 5y = 83. \\ 6x + 7y = 145. \end{cases}$

*Przerób:* (Rozmnożywszy strony obiedwie pierwszego równania przez 2, aby dać równe współczynniki jednéj z dwóch niewiadomych ilości, to jest  $x$ )  $6x + 10y = 166$ .  
 $6x + 7y = 145$ .

(Odiąwszy strony drugiego równania od stron pierwszego)  $3y = 21$ . (W tém równaniu jedna już tylko jest niewiadoma)

(Podzieliwszy przez 3)  $y = 7$ .

Położywszy tę wartość  $y$ , w pierwszym równaniu  $3x + 5y = 83$ , będzie  $3x + 35 = 83$ .

(Odiąwszy 35) . . . . .  $3x = 48$ .

(Podzieliwszy przez 3) . . .  $x = 16$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 16$ . Cena łokcia sukna.  
 $3x = 48$ . Cena 3 łokci.  
 $6x = 96$ . Cena 6 łokci.  
 $y = 7$ . Cena łokcia materji.  
 $5y = 35$ . Cena 5 łokci.  
 $7y = 49$ . Cena 7 łokci.

*Sprawdzenie.*  $48 + 35 = 83$ .

$96 + 49 = 145$ .

*Inszé przykłady.* 5. *Mężczyzn i 7 kobiet, wydano Zł. . . . . 82.*

15. *Mężczyzn i 8 kobiet, wydano Zł. . . . . 168.*

*Ileż wydał każdy mężczyzna i każda kobieta?*

*Pewny kupiec za 12 łokci sukna wziął 14 łokci materji, i oprócz tego Zł. 86. Ténże sám kupiec za 48 łokci tegoż sukna wziął 50 łokci téżże materji, oprócz tego Zł. 384. Jakdż była cena łokcia sukna tego i łokcia materji?*

*Uwaga.* W przykładach poprzedzających można było łatwo uczynić równiemi współczynniki, iedney z dwóch ilości niewiadomych w obudwóch równaniach, a to dla tego, że współczynnik ilości niewiadomej w jedném równaniu był wielokrotnym (multiplus) współczynnika téżże niewiadomej w drugim równaniu. Dostyc więc było dla uczynienia równiemi tych współczynników, rozmnożyć strony równania drugiego przez wieloraz pochodzący z współczynnika więkzszego podzielonego przez współczynnika mniejszego.

Ale gdy współczynniki iedney z ilości niewiadomych nie zawierają się zupełnie ieden w drugim; w tedy postąpić sobie trzeba podobnie iak w obróceniu ułómków z różnemi mianownikami na ułómki z jednakowym mianownikiem, mnożąc obiedwie strony iednego równania, przez współczynnika téj ilości niewiadomej drugiego równania, który się pozbydź chcén y, i znowu mnożąc obiedwie strony drugiego równania przez współczynnika, który má téż ilość niewiadomá w piérwszym równaniu.

93. *Zadanie 4.* 3 korce pszenicy, i 4 korce żyta, kosztowało Zł. 58.

5 korcy pszenicy, i 7 korcy żyta, kosztowało Zł. 99.

*Ileż kosztował korzec żyta, i ile korzec pszenicy?*

*Arytmetycznie.* Ponieważ 3 korce pszenicy, i 4 korce żyta kosztowały Zł. 58; więc 15 korcy pszenicy, i 20 korcy żyta kosztowałyby złotych 290.

Tak téż ponieważ 5 korcy pszenicy i 7 korcy żyta kosztowały Zł. 99; więc 15 korcy pszenicy, i 21 korcy żyta, kosztowałyby Zł. 297.

A że w drugim kupnie byłoby korcem żyta więcéy niż w piérwszym, i dla tego téż w drugim razie zapłaciłoby się 7 Zł. więcéy niż w piérwszym; więc korzec żyta kosztował Zł. 7.

*Algicbr:*



*Algiebr. Mian:*

Cena korca pszenicy . . . . .	$x$ .
Cena 3ch korcy . . . . .	$3x$ .
Cena 5 korcy . . . . .	$5x$ .
Cena korca żyta . . . . .	$y$ .
Cena 4 korcy . . . . .	$4y$ .
Cena 7 korcy . . . . .	$7y$ .

*Warunek.*  $\begin{cases} 3x + 4y = 58. \\ 5x + 7y = 99. \end{cases}$

*Przerób:* (Rozmnożywszy strony 1go równania przez 5)

$$15x + 20y = 290.$$

(Rozmnożywszy strony 2go równania przez 3)

$$15x + 21y = 297.$$

(Odiąwszy strony 1wszego równania od stron drugiego)

$$1y = 7.$$

Tymże sposobem możnaby pozbyć się ilości niewiadomej,  $y$  chcąc przysść do takiego równania, w któreby tylko wchodziła sama niewiadoma  $x$ .

(Rozmnożywszy przez 7, strony 1go równania)

$$21x + 28y = 406.$$

(Rozmnożywszy przez 4, strony drugiego równania)

$$20x + 28y = 396.$$

(Odiąwszy strony drugiego równania, od stron pierwszego)

$$1x = 10.$$

Można także było tak iak wyżej położyć w jednym z dwóch równań zamiast  $y$ , wartość  $y$  znalezioną: i tak pozbywszy się niewiadomej  $y$ , dochodzić wartości drugiej niewiadomej  $x$ , w równaniu już uwolnionem od pierwszej niewiadomej.

*Rozwiązanie.*

$x = 10.$	Cena korca pszenicy.
$3x = 30.$	Cena 3 korcy.
$5x = 50.$	Cena 5 korcy.
$y = 7.$	Cena korca żyta.
$4y = 28.$	Cena 4 korcy.
$7y = 49.$	Cena 7 korcy.

*Sprawdzenie.*  $\begin{cases} 30 + 28 = 58. \\ 50 + 49 = 99 \end{cases}$

*Inszé przykłady.* 5 Mężczyzn i 7 kobiet wydało Zł. . . . . 123  
8 Mężczyzn i 9 kobiet wydało Zł. . . . . 177.

*Ileż wydał każdy mężczyzna? i ile każda kobieta?*

Kupił kto wina 15 butelek iednego gatunku, a n butelek drugiego. Dát za wszystko Zł. 197.

Kupił powtóre 16 butelek pierwszego gatunku, a 15 butelek drugiego, i zapłacił Zł. 233.

*Po czemuż przypadała butelka pierwszego i drugiego gatunku?*

*Prześtroga.* Gdy znaki poprzedzające ilość niewiadomą, którey się pozbydź chcemy są przeciwné, toieft + i —, w dwóch równaniach; wtedy przywiódłszy współczynnikiów ilości niewiadomey do równości w obudwóch równaniach, trzeba té równania już nie odeymować iak wyżej iedno od drugiego, ale do siebie dodawać, aby tym sposobém wyfadzić iedną ilość niewiadomą.

94. Zadanie 5. 5 Korcy pszenicy, i 8 korcy żyta kosztowało Zł. 85.

Za 12 korcy pszenicy dano w zamianę 11 korcy żyta, i 53 Zł. Jakąż była cena korca pszenicy i korca żyta?

Opuszczą się tu rozumowania Arytmetyczne mało co od poprzedzających różniące się. Célém głównieyszym iest teraz dla nás rozwiązanie Zagadnień, wprowadzając w nie w rzeczy samey wiele ilości niewiadomych.

*Mianowanie.*

Cena korca pszenicy	$x$ .
Cena 5 korcy	$5x$ .
Cena 12 korcy	$12x$ .
Cena korca żyta	$y$ .
Cena 8 korcy	$8y$ .
Cena 11 korcy	$11y$ .

*Warunki.* 
$$\begin{cases} 5x + 8y = 85. \\ 12x - 11y = 53. \end{cases}$$

*Przerób:* Dla pozbycia się niewiadomey  $y$  rozmnóżmy strony pierwszego równania przez 11, a drugiego przez 8 będzie . . . .

$$\begin{cases} 55x + 88y = 935. \\ 96x - 88y = 424. \end{cases}$$

(Dodá-

(Dodawszy strony odpowiadające sobie)  $151x = 1359$ .

(Podzieliwszy przez 151)  $1x = 9$ .

Dla pozbycia się niewiadomej  $x$  rozmnożmy strony pierwszego równania przez 12, a drugiego przez 5, będzie

$$\begin{cases} 60x + 96y = 1020. \\ 60x - 55y = 265. \end{cases}$$

(Odiawszy drugie równanie od pierwszego)  $151y = 755$ .

(Podzieliwszy przez 151)  $1y = 5$ .

*Rozwiązanie.* Cena korca pszenicy . . . . 9 Zł.

Cena 9 korcy . . . . 45.

Cena 12 korcy . . . . 108.

Cena korea żyta . . . . 5 Zł.

Cena 8 korcy . . . . 40.

Cena 11 korcy . . . . 55.

*Sprawdzenie.*  $\begin{cases} 45 + 40 = 85. \\ 108 - 55 = 53. \end{cases}$

*Inszé przykłady.* Na zapłaceniu 464 liwrów Francuzkich, dano 12 Luidorów, i 16 Cz: Zł:

Dłużnik winnym będąc 243 liwrów Francuzkich, dał 17 Luidorów, a wrócono mu 15 Cz: Zł. Jakaż tu rachnie się wartość Luidorów i Cz: Zł: w Liwrach Francuzkich?

Na zapłaceniu 769 złotych Polskich, dano 12 luidorów i 17 Czer: Zł. Dłużnik winnym będąc 694 złotych Polskich, dał 25 Luidorów, a wrócono mu 18 Cz: Zł. Na ileż tu złotych Polskich wypadł Luidor i czerwony złoty. (Obacz w Arytmetyce Rozdział V. Części IV.)

*Uwaga.* Sposób postępowania którego użyliśmy w rozwiązywaniu Zagadnień zawierających dwa równania, każde z dwiema niewiadomymi, náyogólniey być może przystósowanym. Są atoli inszé ieszcze sposoby, mniej lub więcéy wygodné, podług różnych przypadków.

95. Powtórzmy zadania poprzedzającego, dwa równania:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 85. \\ 12x - 11y = 53 \end{cases}$$

(W pierwszym równaniu odiawszy  $8y$  po obu stronach)

$$5x = 85 - 8y.$$

(Podzie-



$$(\text{Podzieliwszy przez } 5) \quad \dots \quad 1x = 17 - \frac{8y}{5}$$

$$(\text{W wyrażeniu } 12x \text{ drugiego równania, położywszy zamiast } x, \\ \text{wrażność jego znaną}) \quad 204 - \frac{96y}{5} = 11y = 53.$$

$$(\text{Rozmnożywszy obie strony przez } 5)$$

$$1020 - 96y = 55y = 265.$$

$$\text{to jest } 1020 - 151y = 265.$$

$$(\text{Dodawszy } 151y \text{ do obu stron}) \quad \dots \quad 1020 = 265 + 151y.$$

$$(\text{Odiąwszy } 265 \text{ od obu stron}) \quad \dots \quad 755 = 151y.$$

$$(\text{Podzieliwszy obie strony przez } 151) \quad \dots \quad 5 = 1y.$$

$$\text{A że } \dots \quad 1x = 17 - \frac{8y}{5}$$

$$\text{więc } \dots \quad 1x = 17 - 8 = 9.$$

Zgadza się to zupełnie z poprzedzającym rozwiązaniem.

Ten sposób nazywa się *sposobem zamiany* (Methodus substitutionis.) Wygodnie jest wtedy go osobiście zażywać, gdy w działaniach nasze ułamków nie wprowadzą.

96. *Sposób porównywania.* Uwolniwszy  $x$  od współczynnika w pierwszym równaniu, tak jak wyżej, będzie  $1x = 17 - \frac{8}{5}y$ .

Zróbmy toż samo w drugim równaniu, będzie  $1x = \frac{5}{12} + \frac{1}{12}y$ .

Zrównamy dwie wartości  $x$ , będzie  $17 - \frac{8}{5}y = \frac{5}{12} + \frac{1}{12}y$ .

Dodamy  $\frac{8}{5}y$  do obu stron  $17 = \frac{5}{12} + \frac{1}{12}y + \frac{8}{5}y$ .

Odejmijmy  $\frac{5}{12}$  od obu stron  $12\frac{7}{12} = \frac{1}{12}y + \frac{8}{5}y$ .

Przywieźdźmy ułamki do jednakowe-

go mianownika  $12\frac{35}{60} = \frac{5}{60}y + \frac{26}{60}y$ .

Wykonajmy oznaczone dodanie  $12\frac{35}{60} = \frac{31}{60}y$ .

Rozmnożmy obie strony przez 60  $755 = 31y$ .

Podzielmy obie strony przez 31  $5 = 1y$ , tak jak wyżej.

97. *Uwaga.* Jeżeli chcemy uchronić się ułamków, pozbywszy się niewiadomej  $x$  w obudwóch równaniach; trzeba także niewiadomej  $x$  zostawić i jej współczynniki, i uczynić je równymi, rozmnożywszy wzajemnie jedne.

iednego przez drugiego. I tak we dwóch poprzedzających równaniach, zostawimy  $x$  po iednej stronie z swoim współczynnikiem, będzie

$$\begin{cases} 5x = 85 - 8y. \\ 12x = 53 + 11y. \end{cases}$$

Rozmnożywszy pierwsze równanie przez 12, a drugie przez 5, będzie

$$\begin{cases} 60x = 1020 - 96y. \\ 60x = 265 + 55y. \end{cases}$$

Zrównawszy dwie wartości  $60x$ :

$$1020 - 96y = 265 + 55y.$$

Dodawszy  $96y$  po obu stronach  $1020 = 265 + 151y$ .

Odiawszy 265 . . . . .  $755 = 151y$ .

Podzieliwszy przez 151 . . . . .  $5 = 1y$ , tak jak wyżej.

98. Zadanie 6. Dát kto 1200 Zł: na pierwszy procent, a 1700 Zł. na inny procent. Odebrał w obudwóch razem procentach Zł. 191.

Kto inny znouu dát 8000 Zł. na pierwszy procent, a 1500 Zł. na drugi: i odebrał całego procentu Zł: 585.

Jakież były te dwa procenta?

**Mianowanie.** Niech będzie pierwszy procent od 100 . . .  $x$ .  
Procent od 1200 Zł: . . . . .  $12x$ .  
Procent od 8000 Zł. . . . .  $80x$ .  
Niech będzie 2gi procent od 100 . . .  $y$ .  
Procent od 1700 Zł. . . . .  $17y$ .  
Procent od 1500 Zł. . . . .  $15y$ .

**Warunek.** 
$$\begin{cases} 12x + 17y = 191. \\ 80x + 15y = 585. \end{cases}$$

**Przerabianie.** Podzieliwszy strony drugiego równania przez 5, dla większej w dalszym działaniu łatwości, będzie . . . . .  $16x + 3y = 117$ . Ze zaś pierwsze równanie do prostszych wyrazów być przywiedzioném nie może; więc 
$$\begin{cases} 12x + 17y = 191. \\ 16x + 3y = 117 \end{cases}$$

Ponieważ pierwszym sposobem postępując za cel iedyny to sobie wystawiliśmy, aby współczynniki iednej z niewiadomych np.  $x$  uczynić równemi; gdy tedy dostąpić tego można krótszą drogą, a nie przez mnożenie całych tych współczynników iednego przez drugi, umniemyśmy sobie pracy, i ochro-

nimy czaſu. A że dwa ſpółczynniki niewiadomé  $x$ , mogą być zupełnie podzielone przez 4; więc możemy je przywieść do równoſci, mnożąc wyrazy pierwszego równania, przez 4, toieſt przez wieloráz z 16 podzielonych przez 4: i znowu mnożąc wyrazy drugiego równania przez 3, toieſt przez wieloráz z 12 przez 4 podzielonych. Wypadną po takowém mnożeniu dwa równania

$$\begin{cases} 48x + 68y = 764 \\ 48x + 9y = 351 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48x + 68y = 764 \\ 48x + 9y = 351 \end{cases}$$

(Odiąwszy 2gie równanie, od 1wſzego) . . .  $59y = 413$ .

(Podzieliwszy przez 59) . . .  $y = 7$ .

Aby znaleźć wartość  $x$ , w równaniu  $16x + 3y = 117$ .

Położmy zamiast  $y$ , jego wartość, a będzie  $16x + 21 = 117$ .

(Odiąwszy 21) . . .  $16x = 96$ .

(Podzieliwszy przez 16) . . .  $x = 6$ .

**Rozwiązanie.** Pierwszy procént od 100 . . . 6.

Procént od 1200 . . . 72.

od 8000 . . . 480.

Drugi procént od 100 . . . 7.

Procént od 1700. . . 119.

od 1500. . . 105.

**Sprawdzenie.**  $\begin{cases} 72 + 119 = 191 \\ 480 + 105 = 585 \end{cases}$

**Inſze przykłady.** 8000 Zł. danych na pewny procént a 15000 Zł. danych na inny procént, przynioſty zysku całego Zł. 1450.

12000 Zł. danych na 1wſzy procént a 25000 Zł. danych na drugi procént, przynioſty zysku całego Zł. 2350.

Jakieſz ſą té dwa procénta?

**Uwaga.** Ponieważ w przykładach poprzedzających ſummy dane zawierały w ſobie ſta zupełnie bez żadney reſzty; można więc było wyznaczyć ich procénta nie wprowadzając ułómków.

Trzeba jednak wprawiać Uczniów, i na takich przykładach, w które wchodzi ułómk.

**Przykład.** 1225 Zł. danych na pewny procént a 1240 Zł. danych na inny procént, przynioſty ze wſzyſtkiem zysku 222 Zł.



2375 Zł. danych na pierwszy procent, a 3270 Zł. danych na drugi procent, przyniosłszy ze wszystkiem zysku 517 Zł.

Jakież były te procenta?

Mianowanie. Procent i wśzy od 100 . . . . .  $x$ .

$$\begin{array}{r} \text{. . . . . od 1225 Zł . . . . .} \frac{1225x}{100} \\ \text{. . . . . od 2375 Zł . . . . .} \frac{2375x}{100} \end{array}$$

Procent 2gi od 100 . . . . .  $y$ .

$$\begin{array}{r} \text{. . . . . od 1240 . . . . .} \frac{1240y}{100} \\ \text{. . . . . od 3270 . . . . .} \frac{3270y}{100} \end{array}$$

Warunek. 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1225x}{100} + \frac{1240y}{100} = 222. \\ \frac{2375x}{100} + \frac{3270y}{100} = 517. \end{array} \right.$$

Przerabianie. (Rozmnożywszy przez 100 strony obudwóch równań)

$$\left\{ \begin{array}{l} 1225x + 1240y = 22200. \\ 2375x + 3270y = 51700. \end{array} \right.$$

(Podzieliwszy przez 5 strony obudwóch równań)

$$\left\{ \begin{array}{l} 245x + 248y = 4440. \\ 475x + 654y = 10340. \end{array} \right.$$

(Rozmnożywszy przez 95 strony pierwszego równania, a przez 49 strony drugiego)

$$\left\{ \begin{array}{l} 23275x + 23560y = 421800. \\ 23275x + 32046y = 506660. \end{array} \right.$$

(Odiąwszy strony 1go równania od

$$\text{strón 2go . . . . . } 8486y = 84860.$$

(Podzieliwszy przez 8486) . . . . .  $y = 10.$

Położywszy tę wartość  $y$  w równaniu  $245x + 248y = 4440$ .  
 będzie  $245x + 2480 = 4440$ .  
 (Odiąwszy 2480)  $245x = 1960$ .  
 (Podzieliwszy przez 245)  $1x = 8$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 8$ . Procént 1wśzy od 100.

$$\frac{1225x}{100} = 98. \text{ Procént od } 1225 \text{ Zł.}$$

$$\frac{2375x}{100} = 190. \text{ Procént od } 2375 \text{ Zł.}$$

$y = 10$ . Procént 2gi od 100.

$$\frac{1240y}{100} = 124. \text{ Procént od } 1240 \text{ Zł.}$$

$$\frac{3270y}{100} = 327. \text{ Procént od } 3270 \text{ Zł.}$$

*Sprówdzenie.*  $\begin{cases} 98 + 124 = 222. \\ 190 + 327 = 517. \end{cases}$

99. *Zadanie 7.* Trzy osoby  $A$ ,  $B$ , i  $C$ , rozbięraią między siebie 24 warcabów.

$A$ , udziela dwóm innym każdey z osobna tyle, ile każda już miała.

$B$ , potem udziela dwóm innym każdey z osobna tyle, ile już każda miała.

$C$ , naostatek udziela dwóm innym każdey z osobna tyle, ile każda z nich miała.

Po takowych udzieleniach każda z tych osób mieć będzie po 8 warcabów.

Ilż warcabów miała każda osoba przy pierwszém rozebraniu między siebie tychże warcabów?

*Mianowanie.* Liczba warcabów, którą następnie mają té trzy osoby:

	$B$ .	$C$	$A$ .
Na początku má	$x$	$y$	$24 - x - y$ .
Po udziale od $A$ ,	$2x$	$2y$	$24 - 2x - 2y$ .
Po udziale od $B$ ,	$4x - 24$	$4y$	$48 - 4x - 4y$ .
Po udziale od $C$ ,	$8x - 48$	$8y - 24$ .	$96 - 8x - 8y$ .

*Waru.*

Warunek.  $\begin{cases} 8x - 48 = 8. \\ 8y - 24 = 8. \end{cases}$

Przerabianie. (Dodawszy 48 po obu stronach 1go równania a 24 po obu stronach 2go równania)  $8x = 56.$

$$8y = 32.$$

$$\text{a zatem } x = 7.$$

$$y = 4.$$

Liczba warcabów.

	B.	C.	A.
Na początku	7	4	13.
Po udziale od A	14	8	2.
Po udziale od B	4	16	4.
Po udziale od C	8	8	8.

Inszé przykłady. Te trzy osoby, które w pierwszym razie udzielały sobie po raz pierwszy swoich warcabów, niechby ich sobie w podobny jak wyżej sposób udzielały po dwa razy: naostatek mieć będą po 64 warcaby.

Niechby znoum udzielały ich sobie po trzy razy: mieć będą naostatek po 512 warcabów.

Każda z tych 3 osób daie każdemu ze dwóch innych tyle dwóie, ile każda z nich ma: po iednój takiej zamianie, każda z 3 osób mieć będzie po 27, a po dwóch takich zamianach, każda mieć będzie po 729.

Każda z tych trzech osób, daie każdemu ze dwóch innych połowę tego co już ma: a po iednokrotném udzielaniu wzajemném mieć będą po 27, a po dwukrotném udzielaniu mieć będą po 729.

Co do postępowania Arytmetycznego obacz Rozdziału I. Zadanie 28, i Zadanie 23. Rozdziału II.

100. Zadanie 8. Trzeba znaleźć prostokąt, którego ani długości, ani szerokości nie mamy wiadomój: wiemy tylko, że gdyby był 3 stopami dłuższy, a 2 szerszy; tedy powierzchnia jego większa byłaby 47 ft. kwadr: gdyby zaś więcej miał na 4 stopy długości, a na 3 szerokości; tedy powierzchnia jego większytaby się 70 stóp kw.

Jakież są wymiary iuszego tego prostokąta?

Przygotowanie. Niech będzie ABCD, prostokąt szukany, którego Fig. 20. długości AB, dodaliśmy linią BE, wyrażającą 3 stopy, a szerokości AD, do-



daliśmy linią DG, wyrażającą 2 stopy. Powiększenie powierzchni rwzłego prostokąta składać się będzie ze dwóch prostokątów, CG, BH, i z prostokąta CF, mającego 6 stóp kw. Więc summa prostokątów CG, BH, czyni 41 stóp kw. - Pierwszy z tych prostokątów może się rozłożyć na dwa inne mające szerokości 1 stopę, a długość równą długości szukanego prostokąta. Drugi także z tych prostokątów, może się rozłożyć na trzy inne mające szerokości 1 stopę, a długość równą szerokości szukanego prostokąta. Summa zaś tych 5 prostokątów wyrównywa jednemu prostokątowi mającemu 1 stopę szerokości, a długość równą summie długości dwa razy wziętę, a szerokości trzy razy wziętę szukanego prostokąta. Pierwszy więc warunek na ten wychodzi, iż summa długości prostokąta szukanego dwa razy wziętę, i szerokości trzy razy wziętę powinna uczynić 41 stóp. Tymże sposobem dowieśćby można, iż i drugi warunek na to wychodzi, że summa długości prostokąta szukanego 3 razy wziętę, i szerokości 4 razy wziętę powinna uczynić 58 stóp.

*Mianowanie.* Długość szukanego prostokąta . . . . .  $x$ .  
Szerokość . . . . .  $y$ .

*Warunek.*  $\begin{cases} 2x + 3y = 41. \\ 3x + 4y = 58. \end{cases}$

*Przerób:* (Przywiódłszy do równości współczynniki niewiadomé  $x$ )

$$\begin{cases} 6x + 9y = 123. \\ 6x + 8y = 116. \end{cases}$$

(Odiąwszy 2gié równanie od 1wszého  $1y = 7$ .)

(Przywiódłszy współczynniki niewiadomé  $y$ , do równości)

$$\begin{cases} 8x + 12y = 164. \\ 9x + 12y = 174. \end{cases}$$

(Odiąwszy 1wsze równanie od 2go)  $1x = 10$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 10$ . Długość prostokąta szukanego.  
 $y = 7$ . Szerokość prostokąta szukanego.

---

70 Powierzchnią.  
 $x + 3 = 13$ . Długość powtórną.  
 $y + 2 = 9$ . Szerokość powtórną.

---

117. Powierzchnią.

47. Różnica powierzchni 2giéy od 1wszég.

$$x + 4 = 14.$$

$$\begin{aligned} x + 4 &= 14. & \text{Długość trzecia.} \\ y + 3 &= 10. & \text{Szerokość trzecia.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 140. & \text{Powierzchnia.} \\ 70. & \text{Różnica powierzchni 3ciej od 1wzdej.} \end{aligned}$$

Uwagi w przygotowaniu do mianowania służyły tylko do skrócenia onego. Można by jednak i bez tych uwag przyszedł do tychże samych równań. I tak:

$$\begin{aligned} 1\text{wzdej długość} & \dots x. & \text{Drugą długość} & \dots x + 3. \\ 1\text{wzdej szerokość} & \dots y. & \text{Drugą szerokość} & \dots y + 2. \\ 1\text{wzdej powierzchnia} & \dots xy. & \text{Drugą powierzchnia} & \dots xy + 2x + 3y + 6. \end{aligned}$$

$$\text{Różnica} \dots \dots \dots 2x + 3y + 6.$$

$$\begin{aligned} 3\text{cia długość} & \dots x + 4. \\ 3\text{cia szerokość} & \dots y + 3. \\ 3\text{cia powierzchnia} & \dots xy + 3x + 4y + 12. \end{aligned}$$

$$\text{Różnica} \dots \dots \dots 3x + 4y + 12.$$

$$\text{Warunek.} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 6 = 47. \\ 3x + 4y + 12 = 70. \end{cases}$$

Przerób:  $\begin{cases} 2x + 3y = 41. \\ 3x + 4y = 58. \end{cases}$  Té to są same równania, które wchodziły w warunki wyżej z uwag poprzedzających wyprowadzone.

Inszé przykłady. Nie wiemy wymiarów jakiego prostokąta, wiemy tylko, że przydawszy stóp 3 do jego długości, a stóp 4 do jego szerokości, powierzchnia jego powiększy się 80 ft. kw.

Przydawszy zaś do długości tego prostokąta niewiadomego stóp 4, a stóp 3 do jego szerokości, powierzchnia jego byłaby powiększona 77 stopami kw.

Uwaga. W tym przykładzie tymże samym postąpić można sobie sposobem co i w poprzedzającym. Można jednak przerabianie łatwiej jeszcze wykonać.

Dowiedzenie tego, iż dwa warunki wychodzą na następujące, jest to samo co wyżej.

Summa długości 4 razy wziętej, i szerokości 3 razy wziętej jest 68.

Summa

Summa długości 3 razy wzięty, i szerokości 4 razy wzięty jest . . . . . 65.

Dodawszy te 2 równania, będzie 7 razy długość, i 7 razy szerokość . . . . . 133.

Węc summa pojedynczey długości, i pojedynczey szerokości, jest . . . . . 19.

Odiawszy drugie równanie od 1 wżęgo, długość raz wziętą, mniej szerokością raz wziętą, będzie . . . . . 3.

Węc to Zadanie wychodzi na następujące, które jest bardzo łatwe do rozwiązania. *Różnica dwóch ilości jest 3. summa jest 19.*

*Jakiż, są te ilości?*

Znajdziemy odpowiedź: 11 na długość

8 na szerokość. (Obacz w Rozdziale I.

Zadanie 3.)

Tę uwagę przyśłowować można do wszystkich przypadków, w których spółczynniki jedney niewiadomey w pierwszym równaniu są równe spółczynnikom drugiey niewiadomey w drugim równaniu: a wzajemnie spółczynniki drugiey niewiadomey w pierwszym równaniu, są równe spółczynnikom pierwszey niewiadomey w drugim równaniu: znaki zaś przed tą samą niewiadomą w obudwóch równaniach są jednakowe.

Przykład zagadnienia, które zdaie się być *wyznaczonem* (Problema determinatum) a w samey rzeczy jest *niewyznaczonem*. (Problema indeterminatum).

Nie wiemy wymiarów iakięgo prostokąta: wiemy tylko, że dodawszy 2 stopy do ięgo długości, a 3 stopy do ięgo szerokości; powierzchnia ięgo powiększy się 56 stóp kwadr: jeżeli zaś dodamy 4 stopy do długości, a 6 stóp do szerokości; powierzchnia powiększy się 124 stóp kwadr.

Fig. 21. Niech będzie iakikolwiek prostokąt ABCD, do którego długości dodana jest CG, wyrażającą 2 stopy: do szerokości zaś ięgo dodana jest AE, wyrażającą 3 stopy. Powiększeniem powierzchni tego prostokąta będzie summa prostokątów CI, BE, i IH.

Dodawszy ięszcze do długości linią GN, wyrażającą także 2 stopy, a do szerokości linią EL, wyrażającą także 3 stopy; węgelniczka GNMLEF, którą powiększony jest powtórnie prostokąt, przeniesie węgelniczkę CGFEAB, którą naprzód był powiększony ténże prostokąt, prostokątem HQMO, dwa razy tak wielkim, iak prostokąt BIFH, toieft w danym przypadku przeniesie ią prostokątem zawierającym w sobie 12 stóp kwadr.

Jeżeli



Jeżeli tedy pierwsze powiększenie jest na 56 stóp kw. drugie będzie dwa razy tyle, to jest 112 stóp kw. i oprócz tego 12 stóp kw. a ze wszystkiemi 124 stóp kw. nie mając nawet względu na żadną długość pierwszego boku wyznaczoną w prostokącie.

To samo rozumowanie przystosować można we wszystkich przykładach, gdzie linią CN, tyle razy zawiera w sobie linią CG, ile razy i linią AL, zawiera w sobie linią AE.

Gdyby druga różnica nie taką była daną, iaką być powinna podług powiększeń boków, i podług pierwszego powiększenia powierzchni; tedy Zagadnienie byłoby do rozwiązania niepodobnem, al' co na jedno wychodzi, warunki znosiłyby się jedna przez drugą.

Postępując sobie Algebricznie odkrylibyśmy podobnie to samo niewyznaczenie, czyli sprzeczność, któregośmy przez rozumowanie doszli.

Jakoż niech będzie pierwszą długość  $x$ , a pierwszą szerokość  $y$ . Dostaniemy do następujących dwóch równań.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6 = 56. \\ 6x + 4y + 24 = 124. \end{cases}$$

Weźmy połowę drugiego równania, będzie . . .  $3x + 2y + 12 = 62$ .

Odiąwszy 6 po obu stronach, będzie . . .  $3x + 2y + 6 = 56$ .

Ostatnie to równanie, na które przerobiliśmy 2gie równanie, nie się różni od pierwszego: a zatem dwa równania, które składają warunek, są w istocie te same, i jednakowe zawsze zostaną między sobą, iakąkolwiek byłaby wartość niewiadomych  $x$  i  $y$ . A gdyby druga strona drugiego równania nie taką była iakąśmy ją wyznaczyli; tedy dwa równania mające pierwsze dwie strony równe, miałyby nierówne drugie dwie strony.

Trzeba to jeszcze wykłuzczyć i na przykładach liczebnych.

Nie wiemy wymiarów iakięgo prostokąta, wiemy tylko, że zmniejszyszy 2 stopami szerokość jego, a powiększyszy 2 stopami długość; powierzchnia jego zmniejszy się 32 stopami kwadr: gdyby zaś szerokość zmniejszona była 3 stopami, a długość powiększona 4 stopami; tedy powierzchnia zmniejszałaby się 45 stop: kwadr:

Niech znów będzie inny prostokąt, który powiększony w długości na 4 stopy, a zmniejszony w szerokości na 5 stóp, mniejszą mieć będzie powierzchnią 27 stóp kwadr: gdy zaś długość jego zmniejszy się na 5 stóp, a szerokość

kość powiększy na 4 stopy; powierzchnia przez to będzie zmniejszona 20 stopami kw.

Jako w poprzedzających Zagadnieniach dwie ilości niewiadome zawieraących, do tego przez przerabianie równań zmierzaliśmy, aby zagadnienie przywieść do jedney niewiadomey; tak i w innych Zagadnieniach, gdzie więcej wchodzi niewiadomych, działania przerabiania dzieją się końcem wyfadzenia z równań co raz po jedney niewiadomey, aż się nakoniec jedna tylko niewiadoma zostanie z wyrazami ważności iey okazującemi, a przez nie dochodzimy dopiero ważności innych niewiadomych.

101. Zadanie 9. Mężczyzn 4, kobiet 3, i dzieci 2 wydało 38 Zł.  
 5 Mężczyzn, 4 kobiet, i 3 dzieci, wydało . . . . . 50.  
 7 Mężczyzn, 5 kobiet, i 4 dzieci, wydało . . . . . 67.

Ileż wydał 1 mężczyzna, 1 kobieta, i 1 dziecko?

Mianowanie. Wydatki 1 mężczyzny . . . . .  $x$ .  
 . . . . . 1 kobiety . . . . .  $y$ .  
 . . . . . 1 dziecięcia . . . . .  $z$ .

Warunek.  $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 38 & (A). \\ 5x + 4y + 3z = 50 & (B). \\ 7x + 5y + 4z = 67 & (C). \end{cases}$

Przerabianie. W równaniach B, i A, zrobmy równemi spółczynniki niewiadomey  $x$ .  $\begin{cases} 20x + 16y + 12z = 200, \\ 20x + 15y + 10z = 190. \end{cases}$

Odiawszy . . .  $1y + 2z = 10$ . (D).

W równaniach C, i A, zrobmy także równemi spółczynniki niewiadomey  $x$ .  $\begin{cases} 28x + 20y + 16z = 268, \\ 28x + 21y + 14z = 266. \end{cases}$

Odiawszy . . .  $-y + 2z = 2$ . (E).

W równaniach D, i E, spółczynniki niewiadomych są równe iedne względem drugich, ale znaki iedney z tych niewiadomych są odmienné.

Odiawszy równanie E, od równania D, będzie . . .  $2y = 8$ .

$$y = 4.$$

Dodá-

Dodawczy te dwa równania D, i E, będzie . . . .  $4x = 12.$   
 $12 = 3.$

W jednym ze trzech pierwszych równań, np. w równaniu A, położywszy wartość znaną niewiadomych  $y$ ,  $z$ , będzie

$$\begin{aligned} 4x + 12 + 6 &= 38. \\ \text{czyli } 4x + 18 &= 38. \\ \text{więc } 4x &= 20. \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Wydatek 1 Mężczyzny . . . . 5. Zł.  
 1 Kobiety . . . . 4.  
 1 Dziecięcia . . . . 3.

Sprawdź:  $\begin{cases} 20 + 12 + 6 = 38. \\ 25 + 16 + 9 = 50. \\ 35 + 20 + 12 = 67. \end{cases}$

Uwaga. Gdyby za trzeci warunek podano było, że 7 mężczyzn, 6 kobiet, i 5 dzieci, wydało 74 Zł: tedy zagadnienie na pozór wyznaczone byłoby w samej rzeczy nie wyznaczonem: bo ten trzeci warunek byłby koniecznym wnioskiem ze dwóch pierwszych.

Jakoż w drugim razie więcej jest 1 mężczyznę, 1 kobietę, i 1 dziecięciem, niż w pierwszym: i dla tego w drugim razie, więcej się 12 Zł. wydaie niż w pierwszym.

A że w trzecim razie byłoby więcej 2 mężczyznami, 2 kobietami, i 2 dziećmi, więcej niż w drugim; więc w tym trzecim razie wydatek byłby większy 24 Zł. niż w drugim: i gdyby ten wydatek nie był dany większy 24 złotych niż drugi; tedy warunki Zagadnienia sprzeciwiałyby się jedné drugiemu.

Insze przykłady. 20 Korcy pszenicy, 30 korcy żyta, i 12 korcy owsa, kosztowały . . . . 1164 Zł.

25 Korcy pszenicy, 36 korcy żyta, i 18 korcy owsa, kosztowały . . . . 1464.

32 Korcy pszenicy, 40 korcy żyta, i 24 korcy owsa, kosztowały . . . . 1776.

Ilż kosztował korzec pszenicy, żyta i owsa?



*Mianowanie.* Niech ceny korca pszenicy, żyta i owsa będą  $x, y, z$ .

$$\text{Warunek. } \begin{cases} 20x + 30y + 12z = 1164. \\ 25x + 36y + 18z = 1464. \\ 32x + 40y + 24z = 1776. \end{cases}$$

*Skrócenie.* Podzielmy strony pierwszego równania przez 2, a strony trzeciego równania przez 4.

$$\begin{cases} 10x + 15y + 6z = 582. & (A.) \\ 25x + 36y + 18z = 1464 & (B.) \\ 8x + 10y + 6z = 444 & (C.) \end{cases}$$

*Przerabianie.* Ponieważ współczynniki niewiadomej  $z$ , równe są w równaniach A, i C; więc odejmiemy C, od A . . . .  $2x + 5y = 138$  (D.)

Ze znowu współczynnik niewiadomej  $z$ , w równaniu B, jest 3 razy tak wielki, jak współczynnik téżże niewiadomej w równaniu np. C; rozmnóżmy więc strony równania C, przez 3 . . . . .  $24x + 30y + 18z = 1332$ .

Odjęwszy strony tego ostatniego równania od stron równania B, będzie . . . . .  $ix + 6y = 132$  (E.)

Trzy niewiadome, i trzy równania, przywieśliśmy już do dwóch, to jest

$$\begin{cases} 2x + 5y = 138. \\ ix + 6y = 132. \end{cases}$$

Podwójmy strony 2go równania  $\begin{cases} 2x + 5y = 138. \\ 2x + 12y = 264. \end{cases}$

Odejmiemy 1wsze od 2go . . . . .  $7y = 126$ .

Podzielimy obie strony przez 7 . . . . .  $iy = 18$ .

Położywszy wartość znaną niewiadomej  $y$ , w równaniu E . . . . .  $ix + 108 = 132$ .

$$\text{więc } ix = 24.$$

Położywszy wartość niewiadomych  $x$ , i  $y$ , w równaniu np. A, będzie . . . . .  $240 + 270 + 6z = 582$ .

$$\text{czyli } 510 + 6z = 582.$$

$$\text{więc } . . . . 6z = 72.$$

$$\text{a } . . . . . 1z = 12$$

*Rozwiązanie.* Cena 1 korca pszenicy . . . . . 24 Zł.

. . . . 1 korea żyta . . . . . 18.

. . . . 1 korea owsa . . . . . 12.

*Sprawdz:*

$$\text{Sprawdź: } \begin{cases} 480 + 540 + 144 = 1164. \\ 600 + 648 + 216 = 1464. \\ 768 + 720 + 288 = 1776. \end{cases}$$

102. Zadanie 10. Summa majątku osoby *A*, i podwójnego majątku  
 Osób *B*, i *C*, czyni . . . . . 62. Zł.  
 Summa majątku *B*, i potrójnego majątku *A*, i *C*,  
 czyni . . . . . 84.  
 Summa majątku *C*, i poczwór nego majątku *A*, i *B*,  
 czyni . . . . . 102  
 Jakież są majątki tych osób w szczególności?

Możnaby tu podobnym cale sposobem sobie postąpić, iak w ćwiczeniach poprzedzających, można jednak skrócić cokolwiek działanie w prowadząc nową niewiadomą *f*, któraby wyrażała sumnę tych trzech majątków, oznaczywszy majątki té szczegól nie brane, przez *x*, *y*, *z*.

$$\begin{array}{ll} \text{Pierwsze równanie będzie} & \dots x + 2(f - x) \text{ albo } 2f - x = 62. \\ \text{Drugie} & \dots y + 3(f - y) \text{ albo } 3f - 2y = 84. \\ \text{Trzecie} & \dots z + 4(f - z) \text{ albo } 4f - 3z = 102. \end{array}$$

Rozmnożmy pierwsze równanie, przez 6, drugie przez 3, trzecie przez 2, dla zrównania współczynników ilości niewiadomych: *x*, *y*, *z*.

$$\text{Zrobią się té 3 równania } \begin{cases} 12f - 6x = 372. \\ 9f - 6y = 252. \\ 8f - 6z = 204. \end{cases}$$

Dodamy strony tych 3 równań,  
 zrobi się następujące równanie: . . . . .  $29f - 6x - 6y - 6z = 828.$   
 albo . . . . .  $29f - 6f = 828.$   
 toieft . . . . .  $23f = 828.$   
 a . . . . .  $f = 36.$

Położywszy ważność znaną niewiadomej *f*, w trzech powyższych równaniach, toieft:  $2f - x = 62$  będzie  $72 - x = 62.$

$$\begin{array}{ll} 3f - 2y = 84 & \dots 108 - 2y = 84. \\ 4f - 3z = 102 & \dots 144 - 3z = 102. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Więc } 72 = 62 + 1x & \text{albo } 72 = 62 + 1x. \\ 108 = 84 + 2y & \dots 54 = 42 + 1y. \\ 144 = 102 + 3z & \dots 48 = 34 + 1z. \end{array}$$

Więc na koniec  $x = 10$ .

$$y = 12.$$

$$z = 14.$$

$$\text{Sprawdz: } \begin{cases} 10 + 24 + 28 = 62. \\ 30 + 12 + 42 = 84. \\ 40 + 48 + 14 = 102. \end{cases}$$

Inszé przykłady.

Maiątek A, złączony z połową maiątków B i C, czyni . . . 50 Zł.

Maiątek B, złączony z  $\frac{1}{3}$  maiątków A i C, czyni . . . 36.

Maiątek C, złączony z  $\frac{1}{4}$  maiątków A i B, czyni . . . 46.

Jakież są te maiątki w szczególności?

Summa maiątków A i B, przenosi 7 złotych maiątek C.

Summa podwójną maiątków A i C, przenosi 15 Zł. maiątek B.

Summa potrójną maiątków B i C, przenosi 21 Zł. maiątek A.

Jakież są te maiątki w szczególności?

103. Zadanie II. Maiątek A, złączony z  $\frac{1}{2}$  maiątku B, czyni 25 Zł.

Maiątek B, złączony z  $\frac{2}{3}$  maiątku C, czyni także . . . 25.

Maiątek C, złączony z  $\frac{1}{4}$  maiątku A, czyni także . . . 25.

Jakież są te trzy maiątki w szczególności?

Mianowanie. Niech  $x, y, z$ , wyrażają trzy następnie maiątki: A, B, C.

$$\text{Warunek: } \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 25. \\ y + \frac{2}{3}z = 25. \\ \frac{1}{4}x + z = 25. \end{cases}$$

Przerabianie. Rozmnożmy każde z tych równań, przez mianownika ułamka w nim się znajdującego, będzie:

$$\begin{cases} 2x + y = 50. \\ 3y + z = 75. \\ x + 4z = 100. \end{cases}$$

Podwójmy strony 3go równania . . .  $2x + 8z = 200.$

Odeymyśmy strony 1go równania . . .  $2x + y = 50.$

$$\text{Zostanie } . . . 8z - y = 150.$$

Rozmno-



Rozmnożmy strony 2go równania przez 8 . . .  $8z + 24y = 600$ .

Odeymyśmy od tego równania poprzedzające . . .  $25y = 450$ .

Podzielimy to ostatnie równanie przez 25 . . .  $1y = 18$ .

Położymy tę wartość niewiadomej  $y$ , w 1wżem, i 2giem równa-  
niu przerobionem . . .  $2x + 18 = 50$  więc  $2x = 32$ .

$$54 + z = 75 \quad x = 16.$$

$$z = 21.$$

Rozwiązanie.  $x = 16$ .

$$y = 18.$$

$$z = 21.$$

Inszé przykłady. Maiątek A, złączony z  $\frac{1}{2}$  maiątku B, czyni 62 Zł.

Maiątek B, złączony z  $\frac{1}{4}$  maiątku C, czyni . . . 62.

Maiątek C, złączony z  $\frac{2}{3}$  maiątku A, czyni . . . 62.

Maiątek A, przenosi połowę maiątku B . . . 11. Zł.

Maiątek B, przenosi trzecią część maiątku C . . . 11.

Maiątek C, przenosi piątą część maiątku A . . . 11.

104. Zadanie 12. Trzy Osoby: A, B, C, dzielą między siebie 10500  
Zł. w następujący sposób:

Jeżeli Osoba A, bierze 2 Zł. B, powinna wziąć 3. Jeżeli zaś B,  
bierze 4 Zł. C, powinna wziąć 5.

Arytmetycznie. Jeżeli B, bierze 12 Zł. (toieśt liczbę, którą tak  
przez 3 iak i przez 4 bydz może podzieloną;) tedy A, weźmie 8 Zł. a C,  
weźmie 15 Zł. razem zaś wszystkie té trzy osoby wezmą 35 Zł. Że zaś  
10500 Zł. podzielić maia między siebie, toieśt 300 razy 35 Zł: więc téz i  
części przypadające na A, B, C, będą 300 razy tak wielkie, iak były mnie-  
mané ich piérwzle podziaily, toieśt 8, 12, 15 Zł. a zatem będą 2400, 3600,  
i 4500 Zł.

Algebraicznie. Mianowanie. Podziaily osób A, B, C.

$$. . . . . x, y, z.$$

$$\text{Warunek.} \begin{cases} x = \frac{2}{3} y. \\ y = \frac{4}{3} z. \\ x + y + z = 10500. \end{cases}$$

Prze-

*Przerób:* Ponieważ  $x = \frac{2}{3}y$ .

$$y = \frac{4}{3}z.$$

$$\text{więc } x = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3}z = \frac{8}{9}z.$$

$$\text{a zatem } x + y + z = \frac{8}{9}z + \frac{4}{3}z + z = \frac{8}{9}z + \frac{12}{9}z + \frac{9}{9}z = \frac{29}{9}z = \frac{7}{3}z.$$

$$\text{Że zaś jest } x + y + z = 10500.$$

$$\text{więc } \frac{7}{3}z = 10500.$$

$$\frac{1}{3}z = 1500.$$

$$z = 4500.$$

$$y = \frac{4}{3}z = 6000.$$

$$x = \frac{2}{3}y = 4000.$$

*Inszé przykłady.* Trzy osoby *A*, *B*, *C*, dzielą między siebie 70800 *Zł.*

Jeżeli *A*, bierze 3 *Zł.* tedy *B*, powinna wziąć 4.

Jeżeli *B*, bierze 5 *Zł.* tedy *C*, powinna wziąć 6.

Niech znnowu summa do podziału będzie 3536.

Jeżeli *A*, bierze 5 *Zł.* *B*, weźmie 8.

Jeżeli *B*, weźmie 9 *Zł.* *C*, weźmie 13.

Sposób postępowania tenże sam jest, chociażby więcej niż trzy było niewiadomych ilości. Starać się zawsze należy, aby po iednocy co raz zmniejszać liczbę tych niewiadomych. Dostyc będzie na to dadz ieden lub dwa przykłady.

105. Zadanie 13. Łokci 7 sukna, 5 łokci kitáyki, 4 łokcie atłasu, i 6 łokci płótna, kosztowało . . . . . 205 *Zł.*

8 Łokci sukna, 9 kitáyki, 11 atłasu, 7 płótna, koszt: 322.

9 Łokci sukna, 7 kitáyki, 8 atłasu, 5 płótna, koszt: 288.

11 Łokci sukna, 8 kitáyki, 7 atłasu, 6 płótna, koszt: 320.

*Mian:* Cena łokcia sukna  $x$ , kitáyki  $y$ , atłasu  $z$ , płótna  $u$ .

$$\text{Warunek. } \begin{cases} 7x + 5y + 4z + 6u = 205. \\ 8x + 9y + 11z + 7u = 322. \\ 9x + 7y + 8z + 5u = 288. \\ 11x + 8y + 7z + 6u = 320. \end{cases}$$

*Prze-*

*Przerabianie.* Chcąc się pozbyć niewiadomej np.  $v$ , możnaby. porównywać jedno z równań z każdym ze trzech innych, uczynić równymi współczynniki téżże niewiadomej, które i bez tego już są równe, w 1wżelin, i 4 równaniu. Można jednak skrócić jeszcze to działanie.

Odeymiemy 1wżé równanie od 2go, zostanie  $1x + 4y + 7z + 1v = 117$ .

Rozmnóży to równanie przez 6  $6x + 24y + 42z + 6v = 702$ .

Odeymiemy od niego 1wżé równanie  $7x + 5y + 4z + 6v = 205$ .

Zostanie  $1x + 19y + 38z = 497$ .

Odeymiemy 3cie równanie od 4go, zostanie:  $2x + y - z + v = 32$ .

Rozmnóży przez 6 to równanie  $12x + 6y - 6z + 6v = 192$ .

Odeymiemy to ostatnie równanie od 4go  $11x + 8y + 7z + 6v = 320$ .

Zostanie  $x + 2y + 13z = 128$ .

Naostatek weźmy różnicę 1wżégo równania od 4go, będzie

$$4x + 3y + 3z = 115.$$

Przywiedliśmy już Zagadnienie do trzech tylko następujących warunków.

$$\begin{cases} - 1x + 19y + 38z = 497. \\ - 1x + 2y + 13z = 128. \\ 4x + 3y + 3z = 115. \end{cases}$$

Odeymiemy 2gie równanie od 1go, zostanie  $17y + 25z = 369$ .

Rozmnóży strony drugiego równania przez 4, będzie

$$- 4x + 8y + 52z = 512.$$

Dodamy do tego równania 3cie  $4x + 3y + 3z = 115$ .

$$\text{będzie } 11y + 55z = 627.$$

Zagadnienie przywiedliśmy do dwóch równań  $\begin{cases} 17y + 25z = 369. \\ 11y + 55z = 627. \end{cases}$

Podzielimy strony drugiego z tych równań

przez 11, będzie  $1y + 5z = 57$ .

Rozmnóży to ostatnie równanie przez 5  $5y + 25z = 285$ .

Odeymiemy tak rozmożone równanie od tego  $17y + 25z = 369$ .

$$\text{Zostanie } 12y = 84.$$

$$\text{więc } 1y = 7.$$

$$\text{A że } 1y + 5z = 57; \text{ więc } 7 + 5z = 57.$$

$$\text{a zatem } 5z = 50; \text{ a } z = 10.$$

$$4x + 3y + 3z = 115; \text{ więc } 4x + 21 + 30 = 115.$$

S

czyli



czyli  $4x + 51 = 115$ ; a zatem  $4x = 64$ , a,  $x = 16$ .  
 $1x + 4y + 7z + v = 117$ ; więc  $16 + 28 + 70 + v = 117$ .  
 czyli  $114 + v = 117$ ; a zatem  $v = 3$ .

Rozwiązanie  $x = 16$ . Cena łokcia sukna.  
 $y = 7$ . Cena łokcia kitáyki.  
 $z = 10$ . Cena łokcia atłasu.  
 $v = 3$ . Cena łokcia płótna.

Spróbuje:  $\left[ \begin{array}{l} 112 + 35 + 40 + 18 = 205. \\ 128 + 63 + 110 + 21 = 322. \\ 144 + 49 + 80 + 15 = 288. \\ 176 + 56 + 70 + 18 = 320. \end{array} \right.$

Insze przykłady. Maiątki osób czterech A, B, C, D, są takie, iż

Summa maiątku A, z podwójną summą trzech innych maiątków, czyni . . . . . 61. Cz. Zł.

Summa maiątku B, z potrójną summą trzech innych maiątków czyni 2 razy 61, to jest . . . . . 122.

Summa maiątku C, z poczwórną summą trzech innych maiątków czyni 3 razy 61, to jest . . . . . 183.

Summa maiątku D, z wziętą pięć razy summą trzech innych maiątków, czyni 4 razy 61, to jest . . . . . 244.

Jakież są te maiątki w szczególności?

Niech znówu maiątki osób 4 A, B, C, D, będą takie, iż

Dodawszy maiątek A, do połowy summy innych trzech maiątków, uczyni to . . . . . 37. Cz. Zł.

Dodawszy maiątek B, do trzeciej części summy innych trzech maiątków, uczyni i to . . . . . 37.

Podobnie maiątek C, dodany do czwartej części summy innych 3 maiątków, uczyni . . . . . 37.

Nasłatek i maiątek D, dodany do stey części summy innych trzech maiątków, uczyni . . . . . 37.

Maiątki osób 5, A, B, C, D, E, są takie, iż

Summa maiątku A, i połowy maiątku B, czyni . . . . . 721 Zł.

Summa maiątku B, i trzeciej części maiątku C, czyni . . . . . 721.

Summa

<i>Summa majątku C, i 4<sup>tey</sup> części majątku D, czyni . . .</i>	721.
<i>Summa majątku D, i 4<sup>tey</sup> części majątku E, czyni . . .</i>	721.
<i>Summa majątku E, i 4<sup>tey</sup> części majątku A, czyni . . .</i>	721.

## ROZDZIAŁ IV.

### *Algebra Ogólna.*

106. **D**ziałania około ilości niewiadomych, albo około ich znaków w Algebrze używane, pokazały nam iedną dopiero różnicę zachodzącą w téy mierze między Arytmetyką i Algebrą. Różni się ieszcze Algebra od Arytmetyki, i w sposobie w którym wiadome ilości oznaczają.

W pierwszym Zagadnieniu Rozdziału I. następujące Zadanie było nam do rozwiązania podane: *Ze dwóch osób A, i B, pierwsza ma dwa razy tyle, ile druga: ma zaś 12 Zł. więcej niż druga.*

Rozumowanie, które czyniliśmy końcem rozwiązania tego Zadania, było to samo, któreby czynić należało za daną iakąkolwiek inną różnicą dwóch majątków. Nie mając względu na żadną szczególną liczbę wyznaczoną za tę różnicę, moglibyśmy byli rozumować w sposób następujący.

Nadmiarém majątku téy osoby majątniejszey, nad majątek osoby mniéj majątnéy jest majątek téż saméy osoby mniéj majątnéy. Więc majątek osoby mniéj majątnéy jest różnicą daną dwóch majątków: a majątek osoby majątniejszey jest dwa razy tak wielki, iak jest różnica daną.

Jakąkolwiek tedy liczba wyznaczoną będzie za różnicę dwóch majątków; natychmiast zadanie takowe rozwiązémy, pomniąc na to ogólne rozumowanie uczynione nad wszystkiemi różnicami, któreby wyznaczyć można.

Aby wygodnie wyrazić ogólne rozwiązanie podobnych Zadań, zgodzono się na oznaczenie różnicy danéy przez znak ogólny, na miejsce którego można by potém w każdym przypadku szczególnym położyć wartość różnicy wyznaczonéy.

Oznaczając np. przez  $d$ , tę różnicę, iakąkolwiek ona będzie; poprzedzając Zadanie możnaby bez wyłączenia tak wvrazić: Znaleźć dwie liczby, z których jedna dwa razy jest tak wielką, iak druga, a których różnica jest  $d$ . Odpowiedź znaleziona przez poprzedzając rozumowanie byłaby ta, że dwie ilości szukane są  $d$ ; i  $2d$ .

Sposób postępowania wcale Algiebraiczny, używając znaków niewiadomych tamżeby nas gdzie i pierwszy zaprowadził.

Mianowanie. Mniejszy ilość . . . . .  $x$ .

Większa ilość . . . . .  $x + d$  albo  $2x$ .

Warunek.  $x + d = 2x$ .

Przerabianie.  $d = x$ .

Rozwiązanie.  $x = d$ . Ilość mniejszą.

$x + d = 2d$ . Ilość większą.

$2x = 2d$ . Drugie wyrażenie ilości większej.

Gdyby jedna z szukanych ilości, miała być trzy razy tak wielką, iak druga; tedy różnica byłaby 2 razy tak wielką, iak ilość mniejszą: a tém ilość mniejszą byłaby połową różnicy danej: a ilość większą zawierałaby w sobie półtora razy tę różnicę.

Ponieważ zawsze oznaczamy różnicę daną przez  $d$ , więc mniejszą ilość oznaczoną tu będzie przez  $\frac{1}{2}d$ , a większą przez  $\frac{3}{2}d$ .

Algiebraicznie. Mianowanie. Mniejszy ilość . . .  $x$ .

. . . . . Większa . . . . .  $x + d$ , albo  $3x$ .

Warunek.  $3x = x + d$ .

Przerabianie. (Odiawszy  $x$  po obu stronach) . . .  $2x = d$ .

(Podzieliwszy obie strony przez 2) .  $x = \frac{1}{2}d$ .

Rozwiązanie.  $x = \frac{1}{2}d$ . Ilość mniejszą.

$x + d = \frac{3}{2}d$ . Ilość większą.

$3x = \frac{3}{2}d$ . Drugie wyrażenie ilości większej.

Jakąkolwiek liczbę razy zawierałaby w sobie zupełnie jedna ilość drugą; rozumowanie i sposób postępowania byłby ten sam co wyżej. Zawsze  
tych



tych dwóch ilości różnicą byłaby mniejsza ilość wzięta jeden raz mniej, niżeli się zamyka w większej ilości: a zatem wyrażeniem téj mniejszej ilości byłaby różnica daną podzieloną przez liczbę mniejszą jednością, od téj, któraby okazywała, ile razy większa ilość zawiera w sobie mniejszą.

Otóż znowu przywiedzeni jesteśmy do oznaczenia tego nowego stosunku ogólności przez wybranie jakiego znaku do woli, np.  $m$ , któryby wyrażał liczbę tylu razy, ile jedna ilość zawiera w sobie drugą. Wyrażeniem za-

tém mniejszej ilości będzie  $\frac{d}{m-1}$  czyli różnica daną podzieloną przez liczbę

jednością mniejszą od téj, która oznacza ile razy większa ilość zawiera w sobie mniejszą: a większa będzie  $m$ , razy tylą, iak mniejszą, co się wyraża

na następującym sposobem  $\frac{md}{m-1}$ : to jest mnożąc przez  $m$  licznik ułamka, który oznacza ilość mniejszą.

Té wyrażenia  $\frac{d}{m-1}$ , i  $\frac{md}{m-1}$ , oznaczają jeszcze, iż ilość  $d$ ,

rozmnożoną jest przez ułamki  $\frac{1}{m-1}$ , i  $\frac{m}{m-1}$ : i przeto następującym sposobem zwykły się oznaczają dwie ilości.

$$\text{Mniejsza ilość} \dots \dots \frac{1}{m-1} d.$$

$$\text{Większa ilość} \dots \dots \frac{m}{m-1} d.$$

*Przykłady.* Niech będzie naprzód  $m=3$ , to jest niech będzie jedna ilość trzy razy tak wielką, iak drugą.

$$\frac{1}{m-1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{m}{m-1} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Będą więc ilości szukané  $\frac{1}{2}d$ , i  $1\frac{1}{2}d$ , tak iak wyżej.  
Niech znówu będzie  $m=4$ .

$$\frac{1}{m-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{m}{m-1} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Będą więc ilości szukane  $\frac{1}{3}d$ ,  $1$ ,  $\frac{4}{3}d$ , albo  $1\frac{1}{3}d$ .

Trzeba przytoczyć więcéy iészce innych przykładów, i naznaczyć różnicy  $d$ , różne ważności szczególne.

Sposobém postępowania Algiebraicznym doszlibyśmy tego samego:

Mianowicie. Mniejszy ilość  $x$ .  
Większą  $x + d$ , albo  $mx$ .

Warunek.  $mx = x + d$ .

Przerób: (Odiąwszy  $x$  po obu stronach)  $mx - x = d$ .

Pierwszą stronę tego równania oznaczają, iż wzięwszy  $x$  razy  $m$ , trzeba od tak rozmnożonego  $x$ , toieść od  $mx$ , odjąć raz  $x$ : albo co na jedno wychodzi, że  $x$ , bierze się razy  $m - 1$ . To zaś tak się inaczej oznaczają  $(m - 1)x$  (\*).

Więc.  $(m - 1)x = d$ .

(Podzieliwszy obie strony przez  $m - 1$ )  $x = \frac{d}{m - 1}$  albo  $\frac{1}{m - 1}d$ .

Rozwiązanie.  $x = \frac{1}{m - 1}d$ . Ważność mniejszój ilości.

$mx = \frac{m}{m - 1}d$ . Ważność większój ilości.

$$x + d = \frac{1}{m - 1}d + d, = d\left(\frac{1}{m - 1} + 1\right)$$

Wyraż-

(\*) Gdyby się nawias, (parenthesis) opuścić, i tylko napisało się  $m - 1x$ , toby oznaczało, że od ilości  $m$ , trzeba odjąć  $1x$ : przypada zaś tu odjąć  $1x$ , od  $mx$ , a nie od  $m$ .

Wyrażmy jedność, czyli 1, nakształt ułamku  $\frac{m-1}{m-1}$ .

$$\text{będzie } x + d = d \left( \frac{1}{m-1} + \frac{m-1}{m-1} \right)$$

Dodamy té dwa ułamki, dodając ich liczniki będzie . . . . .

$$x + d = d \left( \frac{m}{m-1} \right) \text{ drugie wyrażenie ilości większey.}$$

Gdy większą ilość zawiera w sobie mniejszą nie zupełnie ale z ułamkiem; wtedy mianowniki ułamków wchodzących w wyrażenia ilości szukanych, są same ilościami ułamkowemi, i té ułamki ułamków powinny być w każdym szczególnym razie przywiedzione do ułamków prostych.

Można iednak uchronić się tego działania używając sposobu następującego.

Niechby np. iedna ilość zawierała w sobie drugą półtora razy, w takim razie większą ilość, miałaby w sobie 3 takie części, iakich mniejszą miała tylko 2. Niechby iedna taką część ogólnie była oznaczona przez  $a$ , większą ilość mogłaby być ogólnie także oznaczona przez  $3a$ , mniejszą przez  $2a$ : ponieważ  $3a$  zawiera w sobie  $2a$ , półtora razy.

Podobnie iakieżkolwiek byłoby wyrażenie ułamkowe, właściwie, albo niewłaściwie tak nazwane, któreby oznaczało, ile razy iedna ilość zawiera w sobie drugą; można zawsze wyrazić wielkość tych ilości, iedną względem drugiey, albo stosunek iedney do drugiey, przez liczby całkowite.

Niech więc będzie Zadanie daleko ogólniejsze takie: Znaleźć dwie ilości, któreby tak się do siebie miały, iak liczby całkowite  $m$ , i  $n$  ( $m$ , większa liczba  $n$ , mniejsza,) i których różnica jest  $d$ .

Mianowanié. Mniejszą ilość . . . . .  $nx$ .  
Większą ilość . . . . .  $mx$  albo  $nx + d$ .

Warunek  $mx = nx + d$ .

Przerabianie. (Odiąwszy  $nx$  po obu stronach)  $mx - nx = d$ .  
(Rozłożywszy pierwszą stronę na dwa Czynniki (Factors,) z których się składa  $1x (m-n) = d$ .

(Podzie-



(Podzieliwszy obie strony przez  $m-n$ ).  $x = \frac{1}{m-n} d$ .

Rozwiązanie.  $nx = \frac{n}{m-n} d$ . Mniejsza ilość.

$mx = \frac{m}{m-n} d$ . Większa ilość.

$$nx + d = \frac{n}{m-n} d + d = d \left( \frac{n}{m-n} + 1 \right) = d \left( \frac{n}{m-n} + \frac{m-n}{m-n} \right) \\ = d \left( \frac{m}{m-n} \right). \text{ Drugie wyrażenie większej ilości. (*)}$$

Przykłady. Złodziey uciekający ubiega 5 mil na dzień: pogón cztery dni po ucieczce za nim wysłana ubiega na dzień mil 7. Jakże prędko dogoni złodzieia?

Rozumo: Przy wysłaniu pogoni złodziey przez 4 dni już uciekając, ubiegł mil 20, i ta jest różnica początkowa drogi pogoni od drogi złodzieia.

Drogi przez pogón, i przez złodzieia ubieżone będą względem pogoni 7, a względem złodzieia 5 mil, tyle razy wziętych, ile dni jest ich biegu. Więc  $m = 7$ .

$$n = 5.$$

$$d = 20.$$

Położywszy zamiast  $m, n, d$ , wartości ich szczególne, będzie

$$x = \frac{1}{m-n} \times d = \frac{1}{7-5} \times 20 = 10. \text{ Dni biegu pogoni.}$$

$$mx = \frac{m}{m-n} \times d = \frac{7}{7-5} \times 20 = 70. \text{ Mile uciekane od pogoni}$$

w 10 dniach.

$$nx = \frac{n}{m-n} \times d = \frac{5}{7-5} \times 20 = 50. \text{ Mile ubieżone od złodzieia od}$$

czasu wysłania pogoni. Niech

(\*) Gdyby się postrzeżało, iż wprowadzenie więcej niż jednego znaku ogólnego sprawuje trudność ucznióm, tedy Nauczyciel dłużey się zabawi nad fa-

Niech znówu będzie

$$\begin{array}{llll} m = 8. & m = 10. & m = 13. & m = 15. \\ n = 5. & n = 6. & n = 9. & n = 11. \text{ i t. d.} \\ d = 24. & d = 32. & d = 36. & d = 40. \end{array}$$

107. Zadanie 2. Znaleźć dwie ilości których summa jest daną, i z których jedna podwójną jest drugiey.

Rozumowanie. Ponieważ jedna z tych ilości podwójną jest drugiey; więc ich summa będzie potrójną ilości mnieyszey: a zatem mnieysza ilość będzie trzecią częścią téy summy, a większa będzie  $\frac{2}{3}$  téyże summy. Przeto gdy summę daną oznaczmy przez  $f$ , mnieyszą ilość oznaczy się przez  $\frac{1}{3}f$ , a większą przez  $\frac{2}{3}f$ .

Algebraicznie. Mianowanie. Mnieysza ilość . . .  $x$ .  
Wiekksza . . . . .  $2x$ .

Warunek.  $1x + 2x = S$ .

Przerabianie.  $3x = S$ .  
 $x = \frac{S}{3} = \frac{1}{3} S$ .

Rozwiązanie.  $x = \frac{1}{3} S$ . Mnieysza ilość.  
 $2x = \frac{2}{3} S$ . Wiekksza ilość.

Sprawdzenie.  $\frac{1}{3} S + \frac{2}{3} S = S$ .

Toż samo rozumowanie, i tenże sposób postępowania ma mieysce, iakąkolwiek liczbę razy zawierałyby jedna ilość drugą, gdy obudwóch ich summa jest daną

Trzeba to piérwéy na wielu przykładach okazać, nim się przystąpi do ogólnych wyrażeń spółczynników.

W ogólności mówiąc: niech będzie summa daną  $f$ , do podzielenia na dwie części, któreby się do siebie miały iak liczby dané  $m$ , i  $n$ .

T

Miano-

mémii przypadkami, że ich tak nazwę, półogólnemi, w którychby spółczynniki ilości niewiadomych, były wyszczególnione przez liczby; a sama tylko różnica, oznaczona, ogólnie. Przez ćwiczenie się na zadaniach następujących nabiorą Uczniowie łatwości w obchodzeniu się w przypadkach tych mniéy ogólnych.

Mianowanie. Części szukané . . .  $mx, nx$ .

Warunek.  $mx + nx = S$ .

Przerabianie.  $x(m + n) = S, x = \frac{S}{m + n} = \frac{1}{m + n} S$ .

Rozwiązanie.  $mx = \frac{m}{m + n} S$ . Części szukané.

$$nx = \frac{n}{m + n} S.$$

Sprawdzenie.  $\frac{m}{m + n} S + \frac{n}{m + n} S = S \left( \frac{m + n}{m + n} \right) = S$ .

108. Przykłady. Dwie osoby w odległości 272 mil będące iadą na przeciecko siebie. Jedną z nich wieżdzą na dzień mil 9, a drugą 7. Za ileż dni zjadą się z sobą, i iak wiele mil każda z nich wieżdzie?

Rozwiązanie. Mile od tych osób wiechane przed spotkaniem się powinny zamykać w sobie 9, i 7 mil tyle razy, ile dni te osoby iechały do siebie: więc

$$x = \frac{1}{m + n} S = \frac{272}{9 + 7} = \frac{272}{16} = 17. \text{ Dni iazdy.}$$

$$mx = \frac{m}{m + n} S = \frac{9 \times 272}{9 + 7} = \frac{2448}{16} = 153. \text{ Mile od rwszeyer osoby wiechane.}$$

$$nx = \frac{n}{m + n} S = \frac{7 \times 272}{9 + 7} = \frac{1904}{16} = 119. \text{ Mile od zgięy osoby wiechane.}$$

Pesena osoba kupiwszy pewną liczbę łokci sukna po 12 Zł. i tyléż łokci materji po 7 Zł. zapłaciła za wszystko 285 złotych.

$$\begin{aligned} \text{Niech znówu będzie } m &= 7, & m &= 8. \\ n &= 5, & n &= 5. \\ S &= 168, & S &= 195. \end{aligned}$$

Uwaga.



*Uwaga.* Ostatnie Zagadnienie wychodzi na jedno, co reguła spółki w Arytmetyce. Rozwiązaliśmy je Geometrycznie na swoim miejscu (Jeom. Część I. § 221.) Rachunek poprzedzający można do wykreślenia przystosować. Jakoż niechby trzeba podzielić linią AB, na 2 części, które by się tak do siebie miały, jak dwie linie dané. Przez końce A, i B, linii AB, pociągniemy po dwóch stronach téj linii, linie AC, BD, równo-odległe od siebie, i równe względem linii danyh. Punkt X, w którym linia CD przeymie linią AB, będzie punktem podziału szukanego. Dla przystosowania tego wykreślenia do rachunku poprowadźmy CE, równo-odległą od AB, tak daleko, aż spotka BD w E. Niech będzie  $AB = a$ .

$$\begin{aligned} AC &= m. & \text{Więc } DE &= AC + BD = m + n. \\ BD &= n. & CE &= a. \end{aligned}$$

Trójkąty DEC, DBX, są podobne: więc  
DE : DB = CE : BX.

$$\text{albo: } m + n : n = a : BX; \text{ a zatem } BX = a \times \frac{n}{m + n}.$$

Trójkąty DEC, CAX, są także podobne: więc  
DE : AC = CE : AX;

$$\text{albo: } m + n : m = a : AX; \text{ a zatem, } Ax = a \times \frac{m}{m + n}.$$

Podobne przystosowanie uczynić można, i do pierwszego Zadania.

109. Zadanie 3. Znaleźć dwie ilości, których daną jest summa i różnica.

*Rozumowanie.* Jeżeli dla otrzymania większej ilości, dodać się do połowy summy daney ilość pewną; toć tę samą ilość odjąć trzeba od połowy summy, aby mieć ilość mniejszą: więc różnica dwóch ilości szukaneyh, będzie dwa razy tak wielką, jak jest różnica iedney z nich od połowy summy: a zatem większą ilość przewyższą połowę summy połową różnicy daney, a mniejszą ilość nie dochodzi połowy téj summy połową także różnicy daney.

Niechby summa daná dwóch ilości była oznaczona przez  $f$ , a różnica przez  $d$ ; będzie ilość większa szukana  $= \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}d$ , a mniejsza  $= \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}d$ .

*Algebraicznie. Mianowanie.* Mniejszy ilość . . .  $x$ .  
Większą . . . . .  $x + d$ .  
Summa . . . . .  $2x + d$ .

*Warunek.*  $2x + d = f$ .

*Przerabianie.* (Odiąwszy  $d$ ) . . . . .  $2x = f - d$ .  
(Podzieliwszy przez 2) . . .  $1x = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}d$ .

*Rozwiązanie.*  $x = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}d$ . Mniejszy ilość.  
 $x + d = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}d + d = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}d + \frac{2}{2}d = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}d$ .  
Większą ilość.

*Sprawdzenie.*  $\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f = f$ .

*Twierdzenie.* Ze dwóch ilości większą równą się zawsze połowie ich summy, i połowie różnicy: mniejszą zaś równą się połowie summy mniejszą połową różnicy.

Jest to twierdzenie wielkiej wagi, które nam już użyteczne było w Jeometrii (§. 342, 343, Części I.) a które i w ciągu tego dzieła wiele się przyda. Można tu przypomnieć dowodzenie Jeometryczne, (§. 188, Części I.) i przyrównać je do wielu liczbych przykładów.

110. *Zadanie. 4.*  $A$ , ma 3 razy tyle, ile  $B$ : gdy zaś zyska tak  $A$ , iak i  $B$ , iędnakową sumę  $a$ ; majątek  $A$ , będzie 2 razy tylko tak wielki, iak majątek  $B$ .

*Przez rozumowanie.* Po zyskaney summie  $a$  przez  $B$ , aby majątek  $A$ , był ięszcze 3 razy tak wielki, iak majątek  $B$ ; trzeba było osobie  $A$ , zyskać  $2a$ . Ale że  $A$ , zyskuje tylko  $a$ ; więc nie dostaie ię  $2a$ , do tego, aby miała 3 razy tyle, ile ma  $B$ , po zysku. Ze zaś po tym zysku z obu stron  $A$ , ma tylko dwa razy tyle, ile  $B$ ; więc nie dostaie osobie  $A$ , majątku osoby  $B$ , który ma po zysku, aby  $A$ , była i potym zysku 3 razy tak majątną iak  $B$ ; więc majątek  $B$  po zysku, ięst  $2a$ , a przed zyskiem był  $a$ .

*Algebraicznie.* 1 wfy majątek  $B$  . . . . .  $x$ .  
1 wfy majątek  $A$  . . . . .  $3x$ .  
2gi majątek  $B$  . . . . .  $x + a$ .  
2gi majątek  $A$  . . . . .  $3x + a$ , albo  $2x + 2a$ .

*Warunek.*  $3x + a = 2x + 2a$ .

Prze-

*Przerabianie.*  $1x + a = 2a$   $1x = a$ .

*Rozwiązanie.*  $1x = a$ . 1wszy majątek B.

$3x = 3a$ . 1wszy majątek A.

$x + a = 2a$ . 2gi majątek B.

$3x + a = 4a$ . 2gi majątek A.

$2x + 2a = 4a$ . Drugie wyrażenie tego 2go majątku A.

Jakążkolwiek tedy będzie summa daná, którą tak A, iak i B zyskuje, wszelako piérwszy majątek B, zawsze będzie równy téj summie, byleby warunki Zagadnienia téż samé zostały. Choćby zaś i nierówne były zyski, i osoba A, zyskała sumę  $a$ , osoba zaś B, sumę  $b$ ; tedy sposób postępowania tak przez rozumowanie, iak i przez Algiebrę byłby prawie ten sam co wyżej.

I tak, aby osoba A, miała zawsze 3 razy tylé, ilé B; trzebaby iéy zyskać  $3b$ , ale że zyskuje tylko  $a$ , (które  $a$ , oznaczá sumę innieyszą niż  $3b$ ;) więc nie dostaie iéy  $3b - a$ , do tego, aby miała 3 razy tylé, ilé B, po zysku. Ze zaś brakuie iéy do tego w saméy rzeczy majątku B, po zysku; więc majątek B, po zysku iest  $3b - a$ .

1wszy majątek B . . . . .  $2b - a$ .

1wszy majątek A . . . . .  $6b - 3a$ .

2gi majątek B . . . . .  $3b - a$ .

2gi majątek A . . . . .  $6b - 2a$ .

*Algiebraicznie.* 1wszy majątek B . . . . .  $x$ .

1wszy majątek A . . . . .  $3x$ .

2gi majątek B . . . . .  $x + b$ .

2gi majątek A . . . . .  $3x + a$  albo  $2x + 2b$ .

*Warunek.*  $3x + a = 2x + 2b$ .

(Odiąwszy  $2x$ )  $1x + a = 2b$ .

(Odiąwszy  $a$ )  $1x = 2b - a$ . tak iak wyżej.

Tymże samym sposobém postąpić sobie należy, iakiżkolwiek byłby liczby razy, któremi jedna z ilości szukanych zawierałyby w sobie drugą, tak przed zyskiem iak i po zysku, co téż na różnych przykładach okazać trzeba. Naostatek rozwiąże się ogólne zagadnienie, szukając dwóch ilości, których wiadomy iest stosunek, i których powiększonych danémi ilościami, stosunek także iest wiadomy. Niech będą dwie ilości, z których naprzód jedna



dną zawiera w sobie drugą razy  $m$ : niech jedna z nich powiększą się ilością  $a$ , drugą zaś ilością  $b$ , i po tém powiększeniu pierwszą niech zawiera drugą, razy  $n$ .

*Przez rozumowanie.* Ponieważ 2gą ilość powiększą się ilością  $b$ , więc gdyby pierwszą powiększyła się ilością  $mb$ ; tedy i po powiększeniu zawierałaby w sobie ilość drugą razy  $m$ . Więc jeżeli  $a = mb$ , tedy  $n$ , będzie  $= m$ , i zagadnienie jest nie wyznaczoném. Jeżeli  $a$  mniej wazy niż  $mb$ ; tedy po powiększeniu obudwóch ilości brakuje rwszemy  $mb - a$  do tego, aby

była  $n$  razy tak wielką, jak 2gą. Że zaś brakuje iey także  $m - n$  razy 2gięj ilości po iey powiększeniu; więc 2gą ilość po swoiem powiększeniu wazy  $\frac{mb - a}{m - n}$ ; przed powiększeniem zaś taż ilość wazyła

$$\frac{mb - a}{m - n} : b = \frac{mb - a - mb + nb}{m - n} = \frac{nb - a}{m - n}.$$

rwszą wazność mniejszemy ilości . . . . .  $\frac{mb - a}{m - n}$

rwszą wazność więkzszy ilości . . . . .  $\frac{mb - a}{m - n}$

2gą wazność mniejszemy ilości . . . . .  $\frac{nb - a}{m - n}$

2gą wazność więkzszy ilości . . . . .  $\frac{nb - a}{m - n}$

Jeżeli  $a$  więcéj wazy, niż  $mb$ ; tedy po powiększeniu obudwóch ilości rwszą zawiera w sobie więcéj niż  $m$ , razy drugą: i do tego, aby ją zawierała razy  $m$ , má nad to  $a - mb$ : ale że téż má nad to i drugą ilość po

iey powiększeniu wziętą razy  $n - m$ ; więc 2gą ilość po swoiem powiększeniu wazy  $\frac{a - mb}{n - m}$ , przed powiększeniem zaś wazyła  $\frac{a - mb}{n - m} : b$

$$= \frac{a - nb}{n - m}.$$

*Uwaga.*

*Uwaga.* Dwa wyrażenia  $\frac{nb - a}{m - n}$  i  $\frac{a - nb}{n - m}$  są równe,

gdy te same w obu wyrażeniach są wartości liter,  $a, b, m, n$ : co okazać można wielorako, np. stąd, że wyrazy 2go ułamku są te same co i wyrazy 1go ułamku rozmnożone przez tę samą ilość — 1. Dla samego więc tylko rozumowania przytłło mieć wzgląd na wielkość  $a$ , względem wielkości  $mb$ .

*Algebr.* Drugą ilość . . .  $x$ . 2gą ilość pomnożoną . . .  $x + b$ .  
i wż . . .  $mx$ . i wż ilość pomnożoną . . .  $mx + a$ .  
albo . . .  $nx + nb$ .

*Warunek.*  $mx + a = nx + nb$ .

*Przerabianie.* (Odiwższy  $a$ ) . . .  $mx = nx + nb - a$ .

(Odiwższy  $mx$ ) . . .  $mx - nx = nb - a$ .

(Podzieliwszy przez  $m - n$ )  $x = \frac{nb - a}{m - n}$ .

*Rozwiąz.*  $x = \frac{nb - a}{m - n}$ . i wż wartość 2gięj ilości. (\*)

$mx = \frac{mnb - am}{m - n}$ . i wż wartość i wżęj ilości.

$x + b = \frac{mb - a}{m - n}$ . 2gą wartość 2gięj ilości.

$mx + a = \frac{mnb - na}{m - n}$ . 2gą wartość i wżęj ilości.

Należy

(\*) O trudności następującej nie trzeba wspominać Uczniom, chyba że ią samą wznicią.

Gdy  $a = mb$ , a zatem  $m = n$  wtedy wyrażenie  $\frac{nb - a}{m - n}$  odmienia się w następu-

iące:  $\frac{nb - mb}{m - n} = b \left( \frac{n - m}{m - n} \right) = b \times \frac{0}{0}$ . Ilość zaś  $\frac{0}{0}$  może być

Należy przystosować te *Formy ogólne* (Formulæ generales) do wiel. przykładów szczególnych.

*Przykład.* Niech będzie . . . . .  $m = 4$   
 $n = 3$ .

$$x = 3b - a.$$

$$mx = 12b - 4a.$$

$$x + b = 4b - a.$$

$$mx + a = 12b - 3a.$$

Podadzą tu Nauczyciele do rozwiązania, i takie Zagadnienia, w których jedna ilość powiększa się, a drugą zmniejsza ilością daną, wyznaczywszy stosunki dwóch szukanych ilości, nim się odmienną, i po ich odmiennach.

III. Zadanie 5. Majątki trzech osób A, B, C, są takie: że

Summa majątków A, i B, jest . . . . . a.

. . . . . A, i C, . . . . . b.

. . . . . B, i C, . . . . . c.

Jakiż będą te majątki w szczególności?

*Arytmetycznie.* Summa podwójną majątków A, B, C.

jest . . . . .  $a + b + c$ .

Summa pojedynczą tychże majątków

$$\frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{Majątek A} \quad \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2}$$

$$\text{. . . . . B} \quad \frac{a + b + c}{2} - b = \frac{a - b + c}{2}$$

$$\text{. . . . . C} \quad \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{-a + b + c}{2}$$

Jeżeli

jakąkolwiek ilością skończoną. Bo dąmy iakikolwiek wieloraz, z tego licznika podzielonego przez mianownika zawsze z rozmnożenia tego wielorazu przez mianownika o, wypadnie o. Węć równie z rachunku, iak i z rozumowania okazuje się, iż zadanie będzie niewyznaczone, gdy  $m = n$ . Co się już pokazało w rozumowaniu.



Jeżeli tedy od summy dwóch ilości, których częścią jest majątek jeden z tych 3. osób, odejmiemy summę daną majątku dwóch innych osób; połowa reszty okaże majątek téż osoby,

*Algebra: Mian:* Summa szukaná 3 osób . . . . .  $x$ .  
 Majątek A . . . . .  $x - c$ .  
 . . . . . B . . . . .  $x - b$ .  
 . . . . . C . . . . .  $x - a$ .  
 Summa 3 majątków . . . . .  $3x - a - b - c$

*Warunek.*  $3x - a - b - c = x$ .

*Przerobienie.* (Dodawszy  $a + b + c$ )  $3x = x + a + b + c$ .  
 (Odeawszy  $x$ ) . . . . .  $2x = a + b + c$ .  
 (Podzieliwszy przez 2)  $x = \frac{a + b + c}{2}$

*Rozwiązanie.*  $x - c = \frac{a + b - c}{2}$  Majątek A.  
 $x - b = \frac{a - b + c}{2}$  Majątek B.  
 $x - a = \frac{-a + b + c}{2}$  Majątek C.

*Sprawdzenie.*  $\frac{a + b - c}{2} + \frac{a - b + c}{2} = a$ .  
 $\frac{a + b - c}{2} + \frac{-a + b + c}{2} = b$ .  
 $\frac{a - b + c}{2} + \frac{-a + b + c}{2} = c$ .

*Przykład.*  $a = 20$ .  
 $b = 16$ .  
 $c = 14$ .

$$\begin{array}{rcl} \frac{a+b-c}{2} & = & \frac{20+16-14}{2} = \frac{22}{2} = 12. \\ \frac{a-b+c}{2} & = & \frac{20-16+14}{2} = \frac{18}{2} = 9. \\ \frac{-a+b+c}{2} & = & \frac{-20+16+14}{2} = \frac{10}{2} = 5. \end{array}$$

Jakież będzie majątek każdego ze 4 osób *A, B, C, D*, gdy summa majątków *A, B, C* . . . . . jest *a*.  
 . . . . . *A, B, D* . . . . . *b*.  
 . . . . . *A, C, D* . . . . . *c*.  
 . . . . . *B, C, D* . . . . . *d*.

Arytmetycznie. Potrójną summa 4 majątków jest  $a+b+c+d$ .

Summa pojedynczą tychże 4 majątków . . . . .  $\frac{a+b+c+d}{3}$ .

Majątek *A* : . . . . .  $\frac{a+b+c+d}{3} - d = \frac{a+b+c-d}{3}$ .

. . . . . *B* : . . . . .  $\frac{a+b+c+d}{3} - c = \frac{a+b-2c+d}{3}$ .

. . . . . *C* : . . . . .  $\frac{a+b+c+d}{3} - b = \frac{a-2b+c+d}{3}$ .

. . . . . *D* : . . . . .  $\frac{a+b+c+d}{3} - a = \frac{-2a+b+c+d}{3}$ .

Jeżeli tedy od summy trzech ilości, które częścią jest majątek jeden z tych 4 osób odejmiemy podwójną summę daną majątku trzech innych osób, i reszty weźmiemy część trzecią; ta okaże majątek téj osoby. Sposób postępowania Algebrycznego jest także ten sam co wyżej.

Mianowicie. Summa szukaną 4 majątków . . . . . *x*.

Majątek *A* . . . . .  $x - d$ .

. . . . . *B* . . . . .  $x - c$ .

. . . . . *C* . . . . .  $x - b$ .

. . . . . *D* . . . . .  $x - a$ .

Summa

$$\begin{aligned} \text{Summa 4 majątków} & \dots \dots \dots 4x - a - b - c - d. \\ \text{albo} & \dots \dots \dots 4x - (a + b + c + d.) \end{aligned}$$

$$\text{Warunek. } 4x - (a + b + c + d) = x.$$

$$\text{Przerabianie. (Dodawszy } a + b + c + d) \quad 4x = x + (a + b + c + d.)$$

$$\text{(Odiąwszy } 1x) \dots \dots \dots 3x = \frac{a + b + c + d.}{1}$$

$$\text{(Podzieliwszy przez 3)} \quad 1x = \frac{a + b + c + d.}{3}.$$

Ténże sam sposób jest postępowania, gdy więcej jeszcze będzie ilości, których (oprócz jednéj z nich) dané są wszystkie summy.

112. Zadanie 6. Majątki czterech osób: A, B, C, D, są takie, że

A, i B, mają razem sumę. . . . . a.

C, i D, mają razem sumę . . . . . b.

A, ma 2 razy tyle, ile C.

D, ma 3 razy tyle, ile B.

Jakież są te majątki w szczególności?

Przez rozumowanie. Niech linią AB, wystawią nam sumę majątków, A i B: a linią CD, niech wystawią sumę majątków C, i D. Niech AX, wyst. Fig. 23. wią majątek szukany, A: BX, majątek B: CY, majątek C: DY, majątek D.

Gdyby AB, była dwa razy tak wielką, iak CD; tedy ponieważ majątek A, dwa razy jest tak wielki, iak majątek C; majątek także B, byłby dwa razy tak wielki, iak majątek D. Ale że majątek B, jest mniejszy niż majątek D, dwa razy wzięty; więc AB, powinna być daną mniejszą niżeli CD, dwa razy wziętą. Niech będzie AE, dwa razy tak wielką, iak CD, będzie też EX, dwa razy tak wielką, iak DY. Aże DY, ma być trzy razy tak wielką, iak BX; więc linią DY, dwa razy wziętą, będzie 6 razy tak wielką, iak BX: a zatem EX, sześć razy także zamyka w sobie linią BX. EB, zaś będzie 5 razy tyle, ila jest BX. A że  $EB = 2b - a$ , więc

$$BX = \frac{2b - a}{5}.$$

$$\text{Majątek B} \dots \dots \dots \frac{2b - a}{5}.$$

$$\dots \dots \dots A \dots \dots a - \left( \frac{2b - a}{5} \right) = \frac{5a - 2b}{5}.$$

Mają-



$$\text{Maiątek D} \quad \frac{6b - 3a}{5}$$

$$\text{C} \quad b - \left( \frac{6b - 3a}{5} \right) = \frac{3a - b}{5}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Algebr: Mian: Maiątek B} & & x. \\ & \text{A} & a - x. \\ & \text{D} & 3x. \\ & \text{C} & b - 3x. \end{array}$$

$$\text{Warunek.} \quad a - x = 2(b - 3x)$$

$$\text{Przerabianie.} \quad a - x = 2b - 6x$$

$$(\text{Dodawszy } 6x) \quad 5x + a = 2b$$

$$(\text{Odiąwszy } a) \quad 5x = 2b - a$$

$$(\text{Podzieliwszy przez } 5) \quad x = \frac{2b - a}{5} \text{ tak jak wy-}$$

żęć.

Sposób postępowania nie odmieni się, choćby odmiennie były dane funkcje: co na innych przykładach okazać należy, z przystosowaniem każdego przypadku do liczb szczególnych.

Mało co także ten sposób odmieni się, gdy dane będą różnice maiątek, albo jednych summa, a drugich różnica. (Obacz w Rozdz. I. Zadanie 21, 22, 23.)

Naostatek przystosowanie jest łatwe, i do innych przypadków, gdzieby więcej jak 4 ilości wchodziło. (Obacz jeszcze i w téj mierze Rozdz. I. Zadanie 29.)

113. Zadanie 7. Mając dane dwie ilości,  $a$ , i  $b$ , z których pierwszą bierze się za więcej niż dwa razy tak wielką, jak drugą: ileż trzeba będzie dodać iednę, i drugiey, aby pierwszą zrobić podwójną drugiey.

Fig. 24.

Niech linie AB, i CD, wystawiają nam ilości dane  $a$ , i  $b$ , z których  $a$ , więcej niż dwa razy jest tak wielką, jak  $b$ . Weźmy na AB, linię AE, dwa razy tak wielką jak CD, i niech linie równe BX, DY, oznaczają ilość, którą trzeba dodać tak do AB, jak i do CD, aby mieć AX, dwa razy tak wielką, jak CY.

Ponie.

Ponieważ  $AX$ , powinna być dwa razy tak wielką, jak  $CY$ , a że już jest  $AE$ , dwa razy tak wielką, jak  $CD$ ; więc  $EX$ , będzie dwa razy tak wielką, jak  $DY$ , albo  $BX$ : a zatem  $BX = EB$ .

$$A \text{ że } EB = a - 2b, \text{ więc } BX = DY = a - 2b.$$

$$AX = a + (a - 2b) = 2a - 2b.$$

$$CY = b + (a - 2b) = a - b.$$

*Algebra: Mian:* Ilość szukaną dla dodania . . .  $x$ .

Summy szukané . . .  $a + x$ , i  $b + x$ .

*Warunek.*  $a + x = 2b + 2x$ .

*Przerobienie:* (Odiąwszy  $x$ )  $a = 2b + x$ .

(Odiąwszy  $2b$ )  $1x = a - 2b$ . tak jak wyżej.

Tymże sposobem mając dane dwie ilości  $a$ , i  $b$ , wyznaczyć można ilość trzecią, któraby tak do  $a$ , jak i do  $b$ , dodana, uczyniła sumę pierwszą 3, 4, 5, i t. d. razy tak wielką jak druga, a w ogólności mówiąc, któraby to sprawiła, aby pierwszą summa była do drugiej w danym stosunku.

Nie odmienny jest i ten sposób, którym rozwiązać możemy następujące Zadanie.

Jakąż ilość odjąć potrzeba, od jednej i od drugiej ilości danej, albo dodać do jednej, a odjąć od drugiej, aby te dwie ilości miały się do siebie, jak z liczby danej?

114. Zadanie 8. Pewna osoba kupiła liczbę  $n$ , łokci sukna, dwójki gatunku, lepszego łokcie po  $Zł. a$ , podleyjszego zaś łokcie po  $Zł. b$ . Wydała ze wszystkich na sukno sumę  $f$ .

Ilę łokci było w wyższej, a ilę w niższej cenie?

*Arytmetycznie.* Gdyby wszystkie łokcie tego sukna były po  $Zł. a$ , tedyby kosztowały  $Zł. an$ , a że tylko kosztowały  $f$ , więc mieliby w samą rzecz kosztowały  $Zł. an - f$ . Ta zaś różnica stąd pochodzi, że była kupiona pewna liczba łokci, tylko po  $Zł. b$ , to jest taniej łokcie złotych  $a - b$ ; a zatem ilę razy ta różnica  $a - b$ , ceny łokcia sukna tańszego, od droższego, znajduje się w różnicy  $an - f$ , ceny wszystkich łokci sukna tańszego, od droższego; tyle też łokci było sukna tańszego. Podzieliwszy więc  $an - f$ , przez  $a - b$ , dojdziemy liczby łokci sukna tańszego.

$$\frac{an - f}{a - b} \quad \text{Liczba łokci sukna tańszego.}$$

$$n - \left( \frac{an - f}{a - b} \right) = \frac{an - bn}{a - b} = \left( \frac{an - f}{a - b} = \frac{f - bn}{a - b} \right) \quad \text{Liczba łokci sukna droższego.}$$

*Uwaga.* To Zadanie ogólniey iefzcze wzięte, takby mogło bydź wyrażoné.

Podzielić liczbę daną  $n$ , na dwie części, których rozmnożonych przez liczby dané  $a$ , i  $b$ , summa równałaby się liczbie danéy  $f$ .

Toż Zadanie uważając ié Jeometrycznie, wyszłoby na następujące:

Znaleźć dwie linie, których daná iest summa, i których wiemy summe prostokątów, przez dwie inné linie dané.

Fig. 25.

Niech będzie  $AB$ , liniá daná, którą tak podzielić trzeba w punkcie  $X$ , aby summa prostokątów ze dwóch części  $AX$ ,  $BX$ , przez linie dané  $AC$ ,  $BD$ , równałá się wielkości danéy.

Wyftawmy sobie, iak gdyby zrobioné dwa prostokąty  $AXYC$ ,  $BXZD$ , z części szukanych  $AX$ ,  $BX$ , przez linie dané: i póciagniemy  $DZ$ , aż się spotká, z  $AC$ , w  $E$ .

Prostokąt  $ABDE$ , z całéy linii danéy  $AB$ , przez  $BD$ , iest wiadomy, więc prostokąt  $EZYC$ , który iest nadmiarém summy danéy dwóch prostokątów, nad prostokąt  $ABDE$ , będzie także wiadomy. Aże ieden bok iego  $CE$ , który iest różnicą dwóch linii danych  $AC$ ,  $BD$ , iest wiadomy; więc téż i drugi bok  $EZ$ , albo  $AX$  wiadomy będzie.

Niech będzie iak wyżéy . . . . .  $AB = n$ .

$AC = a$ .

$BD = b$ .

Summa daná powierzchni 2 prostokątów . . . . .  $f$ .

Będzie  $ABDE = nb$ .

a zatem  $EZYC = f - nb$ .

a że iest  $EC = a - b$ .

więc  $EZ$ , albo  $AX = \frac{f - nb}{a - b}$ .



$$BX = AB - AX = n - \left( \frac{f - nb}{a - b} \right) = \frac{an - f}{a - b}.$$

$$AXYC = \frac{f - nb}{a - b} \times a = \frac{af - anb}{a - b}.$$

$$BXZD = \frac{an - f}{a - b} \times b = \frac{abn - bf}{a - b}.$$

$$AXYC + BXZD = \frac{af - anb}{a - b} + \frac{abn - bf}{a - b} = \frac{af - bf}{a - b} = f \left( \frac{a - b}{a - b} \right) = f.$$

*Algebraicznie. Mianowanie.* Jedną część . . . . .  $x$ .  
Drugą część . . . . .  $n - x$ .

Pierwszą część przez  $a$  rozmnożoną . . . . .  $ax$ .

Drugą część przez  $b$  rozmnożoną . . . . .  $bn - bx$ .

*Warunek:*  $ax + bn - bx = S$ .

*Przerób:* (Odiawszy  $bn$ ) . . . . .  $ax - bx = f - bn$ .

albo . . . . .  $x(a - b) = f - bn$ .

(Podzieliwszy przez  $a - b$ )  $x = \frac{f - bn}{a - b}$ . tak iak wyżej.

Możnaby tak ogólnie rozwiązać i Zadania 31 aż do 34go Rozdziału I. które na to wychodzą, aby znaleźć dwie liczby, których summa, albo różnica jest daną, i których wiemy także summę, albo różnicę wieloczynów, przez liczby dané.

Trzeba będzie każdy przypadek, do przykładów liczebnych przystosować.

115. Zadanie 9. Jest prostokąt, którego długość dwa razy tak wielką, iak szerokość. Dodano liczbę słoń  $m$ , wiadomą do jego długości, a liczbę słoń  $n$  także wiadomą, do jego szerokości. Powierzchnią prostokąta powiększyła się przez to liczbą daną  $p$ , słoń kwadratowych.

Niech będzie  $AXYZ$  prostokąt, którego długość  $AX$ , dwa razy jest tak wielką, iak szerokość  $AZ$ : gdy do boków jego dodamy linie wiadome  $BX$ ,  $CZ$ , ( $m$ , i  $n$ ) powierzchnią powiększona będzie liczbą daną  $p$ , słoń kwadratowych.

Fig. 25,

Powię.

Powiększeniem téj powierzchni jest Węgielniczka BXYZCDB, którą można rozłożyć na dwa prostokąty BY, i FZ, mające za boki linie dané BX, CZ, i linie szukane XY, ZY, i na prostokąt EDFY, którego daną jest powierzchnia  $mn$ . Więc i summa dwóch prostokątów BY, i FZ, będzie daną, bo będzie  $p - mn$ .

Summa tych dwóch prostokątów, równa się trzem prostokątóm mającym za bok ieden spólny szerokość XY, pierwszego prostokąta, a z których dwa mają za drugi bok powiększenie CZ, albo  $n$  szerokości, trzeci zaś má za bok drugi powiększenie BX, albo  $m$ , długości, i powierzchnia tych trzech prostokątów, równałaby się powierzchni iednego prostokąta, któryby miał za ieden bok szerokość XY, pierwszego prostokąta, a za bok drugi sumnę z linii BX, i dwa razy wziętę CZ. Powierzchnia tego prostokąta, byłaby  $p - mn$ ; a że ieden bok iego wiadomy, jest  $m + 2n$ , więc drugi iego bok XY, będzie  $\frac{p - mn}{m + 2n}$ .

Szerokość 1go prostokąta . . . . .	$\frac{p - mn}{m + 2n}$
Długość . . . . .	$2p - 2mn$
Powierzchnia . . . . .	$m + 2n$
	$2(pp - 2pmn + mnn)$
	$mn + 4mn + 4nn$
Druga szerokość . . . . .	$\frac{p - mn}{m + 2n} + n = \frac{p + 2nn}{m + 2n}$
Druga długość . . . . .	$\frac{2p - 2mn}{m + 2n} + m = \frac{2p + mnn}{m + 2n}$
Druga powierzchnia . . . . .	$\frac{2pp + pmm + 4pnn + 2mnnn}{mn + 4mn + 4nn}$
Różnica dwóch powierzchni . . . . .	$\frac{pmm + 4pnn + 4pnn}{mn + 4mn + 4nn} =$

$$p \left( \frac{mn + 4mn + 4nn}{mn + 4mn + 4nn} \right) = p.$$

Wzór

*Wzór rozmnażeń poprzedzających:*

$$p + 2mn \dots \dots \dots \text{Mnożny.}$$

$$2p + mn \dots \dots \dots \text{Mnożnik.}$$

$$2pp + 4pmn \dots \dots \dots \text{Wieloczyn przez } 2p.$$

$$pmn + 2mmn \dots \dots \dots \text{Wieloczyn przez } mn.$$

$$2pp + 4pmn + pmn + 2mmn \dots \dots \dots \text{Wieloczyn całkowity.}$$

$$p - mn \dots \dots \dots \text{Mnożny.}$$

$$p - mn \dots \dots \dots \text{Mnożnik.}$$

$$pp - pmn \dots \dots \dots \text{Wieloczyn przez } p.$$

$$- pmn + mmm \dots \dots \dots \text{Wieloczyn przez } - mn.$$

$$pp - 2pmn + mmm \dots \dots \dots \text{Wieloczyn całkowity.}$$

$$2pp - 4pmn + 2mmn \dots \dots \dots \text{Wieloczyn } p - mn, \text{ przez } 2(p - mn)$$

$$2pp + 4pmn + pmn + 2mmn \dots \dots \dots \text{Odiemny, (Minuendus.)}$$

$$2pp - 4pmn \dots \dots \dots + 2mmn \dots \dots \dots \text{Odiemnik. (Subtrahendus.)}$$

$$4pmn + 4pmn + pmn.$$

$$\text{albo } \dots \dots \dots p(4mn + 4mn + mn.)$$

$$\text{albo na koniec, } \dots \dots p(2n + m)^2 \dots \dots \text{Reszta.}$$

*Algebra: Mian:*    1 wsza szerokość  $\dots \dots \dots x.$

                          1 wsza długość  $\dots \dots \dots 2x.$

                          1 wsza powierzchnia  $\dots \dots \dots 2xx.$

2ga szerokość  $\dots \dots \dots x + n.$     Mnożny.

2ga długość  $\dots \dots \dots 2x + m.$     Mnożnik.

$$2xx + 2nx \dots \dots \dots \text{Wieloczyn przez } 2x.$$

$$mx + mn \dots \dots \dots \text{Wieloczyn przez } m.$$

$$2ga \text{ powierzchnia } \dots \dots 2xx + x(m + 2n) + mn. \text{ Wieloczyn}$$

całkowity.

$$x(m + 2n) + mn. \text{ Różnica dwóch powierzchni.}$$

*Warunek.*  $x(m + 2n) + mn = p.$



*Przerabianie.* (Odiawszy  $mn$ ) . . . . .  $x(m+2n)=p-mn$ .

$$(Podzieliwszy przez  $m+2n$ )  $x = \frac{p-mn}{m+2n}$ . i wśz$$

szérokóść tak iak wyżéy.

Ténże sám iest sposób postępowania, iakiżkolwiek będzie sfofunek dwóch boków 1go prostokąta: co na wielu przykładach okazać należy. Tymże prawie sposobém można by ogólnie rozwiązać Zadanie 37, i 38. Rozdziału I.

Przy tych Zadaniach podała się pora, do czynienia mnożenia Algiebraicznego przez znaki ogólne.

116. *Przykład 1.* Znaleźć wyrażenie kwadratu summy dwóch ilości?

$a + b$ . Mnożny.

$a + b$ . Mnożnik.

---

$aa + ab$ . Wieloczyn przez  $a$ .

$ab + bb$ . Wieloczyn przez  $b$ .

---

$aa + 2ab + bb$ . Kwadrat z  $a + b$ , który zawiera w sobie kwadrat z  $a$ , i z  $b$ , i dwa razy wzięty wieloczyn jednéy z tych ilości przez drugą.

To podanie dowiodło się na swoiém miejscu sposobém Jeometrycznym, i służyło za wstęp do sposobu wyciągnięcia pierwiastku kwadratowego. (§. 111. Części I. Jeome)

117. *Przykład 2.* Znaleźć kwadrat różnicy dwóch ilości?

$a - b$ . Mnożny.

$a - b$ . Mnożnik.

---

$aa - ab$ . Wieloczyn przez  $a$ .

$-ab + bb$ . Wieloczyn przez  $b$ .

---

$aa - 2ab + bb$ . Wieloczyn całkowity, czyli kwadrat z  $a - b$ .

Tego podania można także dowieśdź Jeometrycznie.

Jakoż niech będą AB, BC, dwie linie, których różnicą jest AC: Fig. 27. zróbmy kwadrat ABDE, z AB, i weźmy AF, EI, BH, równe linii AC. Poprowadźmy FH, IC, któreby się przecięły w G; i na BC, wystawmy kwadrat BCLM.

Kwadrat ACGF, różnicy AC, równa się kwadratowi ABDE, mniej węgelniczką BDEFGCB. albo, (dodawszy i odjąwszy kwadrat BCLM) kwadrat ACGF, równa się kwadratowi ABDE, mniej węgelniczką MLGFEDM, a więcę kwadratem BCLM. Że zaś ta węgelniczka składa się ze dwóch prostokątów równych MG, FD, które są prostokątami z linii AB, i BC; więc kwadrat różnicy AC, dwóch linii AB, BC, równa się różnicy między sumą kwadratów tychże linii, i ich prostokątem dwa razy wziętym.

118. Przykład 3. Znaleźć wyrażenie wieloczynu z summy dwóch ilości, przez ich różnicę?

$a + b$ . Summa dwóch ilości.

$a - b$ . Różnica tychże ilości.

---

$aa + ab$ . Wieloczyn przez  $a$ .

$-ab - bb$ . Wieloczyn przez  $-b$ .

---

$aa - bb$ . Wieloczyn całkowity.

Wieloczyn summy dwóch ilości przez ich różnicę, równa się różnicy kwadratów, tychże ilości.

W figurze poprzedzającej niech będą AB, i AC, dwie linie, których różnica jest BC: i niech tych dwóch linii będą kwadraty AD, AG; różnicą tych kwadratów jest węgelniczka BCGFEDB, która się równa summie prostokątów BCID, EFGI, mających też samą szerokość BC, to jest różnicę dwóch linii AB, AC, a sumnę długości tę samą, co summa linii BD, (albo AB) i EI, (albo AC.)

Wniosek. Niech będą AC, CD, dwie linie, których summa jest Fig. 28. AD, a których różnica BD, wyznaczona będzie, biorąc BC równą AC. Prostokąt z AD, przez BD, równa się różnicy kwadratów z AC, i z CD. Więc wzajemnie uważając linie AD, BD, iak dwie ilości, których połową summy, jest AC, a połową różnicy jest CD; prostokąt tych dwóch ilości, równa się różnicy kwadratów połowy ich summy, i połowy różnicy.

119. Przykład 4. Gdy do kwadratu summy dwóch ilości, dodamy kwadrat ich różnicy, iakież będzie wyrażenie summy, z tego dodania wynikającej?

X 2

$a + b$ .

$$a + b \dots \text{Kwadrat } aa + 2ab + bb.$$

$$a - b \dots \text{Kwadrat } aa - 2ab + bb.$$

$$\text{Summa kwadratów} \dots 2aa + 2bb = 2(aa + bb.)$$

Jeżeli tedy do kwadratu summy dwóch ilości, dodamy kwadrat ich różnicy; wypadnie summa zawierająca w sobie dwa razy sumę kwadratów, tych dwóch ilości.

Fig. 29.

*Geometrycznie.* Niech będą AC, BC, dwie linie, których summa jest AB, a których znajdziemy różnicę, wzięwszy CD, równą AC.

Wystawmy na linii AD, prostopadłą CE, równą AC, albo CD, i poprowadźmy AE, DE. Niech jeszcze będzie i BF, prostopadła do AD, spotykająca w F, linią DE. Pociągniemy AF, i FG, prostopadłą do CE. Linie BD, BF, są równe; więc kwadrat z AF, który jest równy summie kwadratów z AB, i z BF, będzie też równy summie kwadratów z AB, i z BD. Ponieważ zaś kąt AED, jest prosty; więc kwadrat z AF, będzie także równy summie kwadratów, z AE, i z EF, a zatem summa kwadratów z AE, i z EF, równa się summie kwadratów, z AB, i z BD.

A że Trójkąty: ACE, EGF, są prostokątne, i równoramienne; więc kwadraty z AE, i z EF są, pierwszy dwa razy tak wielki, jak kwadrat z AC, a drugi dwa razy tak wielki, jak kwadrat z FG, albo z BC.

Więc summa kwadratów z AB, i z BD, jest dwa razy tak wielką, jak summa kwadratów z AC, i z BC.

Wziąćmy tedy by linie AB, i BD były dane, tedy summa ich kwadratów byłaby dwa razy tak wielką, jak summa kwadratów połowy ich summy AC, i połowy ich różnicy BC.

A zatem aby przeciąć linią AD, na dwie takie części, których summa kwadratów byłaby jak może być najmniejszą; trzeba ją przeciąć na dwie części równe.

120. Przykład 5. Gdy od kwadratu summy dwóch ilości odejmiemy kwadrat ich różnicy, iakąż będzie różnica tych kwadratów?

$$a + b \dots \text{Kwadrat } aa + 2ab + bb.$$

$$a - b \dots \text{Kwadrat } aa - 2ab + bb.$$

$$\text{Różnica} \dots 4ab.$$

Jeżeli



Jeżeli tedy od kwadratu summy dwóch ilości, odejmiemy kwadrat ich różnicy; zostanie się wieloczyn tych dwóch ilości cztery razy wzięty.

*Geometrycznie.* Niech będą  $AB, BC$ , dwie linie, których summa jest  $AC$ . Weźmy  $AD = BC$ , i wyślawmy kwadrat  $ACDE$  na linii  $AC$ : weźmy  $CF, DG, EH$ , równe linii  $BC$ , albo  $AD$ : Przez punkta  $F$ , i  $H$ , poprowadźmy równo-odległe od  $AC$ , a przez punkta  $D$ , i  $G$ , poprowadźmy równo-odległe od  $AE$ , któreby spotkały pierwsze równo-odległe w punktach  $M, L, N, I$ . Fig. 30.

Kwadrat  $ACDE$ , jest kwadratem summy linii  $AB, BC$ , a kwadrat  $ILMN$ , jest kwadratem różnicy  $BD$ , tychże linii. Różnica zaś tych dwóch kwadratów składa się ze czterech prostokątów takich jak  $CDLF$ , których boki równe są liniom  $AB, BC$ .

121. *Przykład 6.* Jakież jest skład sześciannu z summy dwóch ilości?

Summa podana . . . . .  $a + b$ .

Kwadrat téj summy . . . . .  $aa + 2ab + bb$ . Mnożny.

$a + b$  . . . . . Mnożnik,

$aaa + 2aab + abb$ . . . . . Wieloczyn przez  $a$ .

$aab + 2abb + bbb$ . Wieloczyn przez  $b$ .

$aaa + 3aab + 3abb + bbb$ . Wieloczyn całkowity, albo sześciannu z  $a + b$ .

122. *Uwaga.* Zamiast  $aaa$ , pisze się też  $a^3$ , i obadwa té wyrażenia znaczą, że  $a$  przez  $a$ , i znowu przez  $a$ , ciągle jest rozmnożone, czyli że  $a$ , bierze się 3 razy za Czynnika. Liczba 3 ma tu nazwisko *wykładnika*. Podobnie też pisze się  $aa$ , albo  $a^2$ , dla oznaczenia kwadratu z  $a$ , albo Wieloczyna z  $a$ , przez  $a$ : albo na koniec (co na jedno wychodzi,) dla oznaczenia, że  $a$ , dwa razy się bierze za Czynnika.

Podług tego, Sześciannu z  $a + b$ , oznaczyłby się następującym sposobem:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , które to wyrażenie składa się z Sześciannu iednéj ilości . . . . . ( $a^3$ .)

z potrójnego wieloczyna kwadratu téj ilości przez drugą ( $3a^2b$ .)

z potrójnego wieloczyna téjże ilości przez kwadrat drugiey ( $3ab^2$ .)

X 3

i z sze-

i z sześciannu drugiey ilości ( $b^3$ .)

To podanie Jeometrycznie już wyłożyliśmy, i służyło nam do wy-  
ciągnięcia pierwiastku Sześciannego. (§. 35. Części II.)

123. Przykład 7. Jakiż jest skład sześciannu, z różnicy dwóch ilości?

Różnica podana . . .  $a - b$

Kwadrat téy różnicy  $aa - 2ab + bb$ . Mnożny.

$a - b$  . . . . . Mnożnik.

---

$a^3 - 2a^2b + ab^2$ . Wieloczyn przez  $a$ .

$- a^2b + 2ab^2 - b^3$ . Wieloczyn przez  $-b$ .

---

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ . Wieloczyn całkowity,  
albo sześcián z  $a - b$ .

Tę regułę Algiebraiczną Sześciannu, wyłożyć słowy można podobnie  
jak wyżej.

124. Zadanie 10. Pewny oycier zapisał nuystarszemu dziećci sumę  $a$ , i  $\frac{1}{5}$  część reszty majątku: drugiemu zapisał  $2a$ , i  $\frac{1}{5}$  część reszty majątku: trzeciemu zapisał  $3a$ , i  $\frac{1}{5}$  część reszty majątku. i t. d. Wszystkie jego dzieci równie były podzielone tym sposobem. Ileż ich było? ile się każdemu dostało? i jaki był cały majątek oycia?

Rozumowanie Arytmetyczne to samo tu przystosować można, które-  
go użyliśmy w 2 i Zadaniu, Rozdz. II.

Jakoż najmłodszé dzieć nie weźmie żadney części drugiey na swój dział: bo gdyby ją wzięło; tedyby jeszcze coś z całego oycowskiego majątku pozostało: nie zaś pozostać nie powinno. Więc na dział jego przypadnie summa  $a$ , tylé razy wziętá, ile jest wszystkich dzieci.

Pierwszą część działu na przedostatnie dzieć przypadać, będzie od działu dziećcia ostatniego mnieyszą ilością  $a$ : a że tylé mu się má dostać co i najmłodszemu; więc drugá część działu jego będzie  $a$ .

A że ta drugá część jest  $\frac{1}{5}$  częścią reszty majątku, przed wzięciem téżże części; więc nim to przedostatnie dzieć wzięło  $\frac{1}{5}$  część, zostawało jeszcze  $6a$ ; a zatem na dział najmłodszemu dostało się  $5a$ .

Ze zaś najmłodszé dzieć wzięło  $a$  tylé razy, ile było dzieci; więc było ich 5. Jest tedy dział każdego dziećcia  $5a$ , a wartość majątku oycowskiego  $25a$ .

Majątek

Majątek oycowski	25a.
1włz. część náystarszego dziecięcia	a.
Zostaie się majątku	24a.
2g. część náystarszego	4a.
Cały dział	5a.
Zostaie się	20a.
1włz. część 2go dziecięcia	2a.
Zostaie się	18a.
2g. część tegoż	3a.
Cały dział	5a.
Zostaie się	15a.
1włz. część 3go	3a.
Zostaie się	12a.
2g. część tegoż	2a.
Cały dział	5a.
Zostaie się	10a.
1włz. część 4go	4a.
Zostaie się	6a.
2g. część tegoż	1a.
Cały dział	5a.
Zostaie się	5a.
1włz. część ostatniego	5a.
Zostaie się	0.
2g. część tegoż	0.
Cały dział	5a.
<i>Algiebr: Mian: Majątek oycowski</i>	x.
1włz. część działu náystarszego dziecięcia	a.
Zostaie się majątku	x — a.
2g. część działu tegoż	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a.$
Dział náystarszego dziecięcia	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a.$
Zostaie się majątku	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a.$
1włz. część działu 2go dziecięcia	2a.
Zostaie się majątku	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a.$



2gą część działu tegoż . . . . .  $\frac{5}{36}x - \frac{1}{36}a$ .

Dział 2go dziecięcia . . . . .  $\frac{5}{36}x + \frac{5}{36}a$ .

Warunek.  $\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}a = \frac{5}{36}x + \frac{5}{36}a$ .

Przerabianie. (Przywiódłszy ułamki do jednakowego mianownika)

$$\frac{5}{36}x + \frac{30}{36}a = \frac{5}{36}x + \frac{5}{36}a.$$

(Rozmnożywszy przez 36)  $5x + 30a = 5x + 5a$ .

(Odiąwszy  $5x$ ) . . . . .  $1x + 30a = 5a$ .

(Odiąwszy  $30a$ ) . . . . .  $1x = 25a$ .

Zgadza się to z rozwiązaniem, przez rozumowanie.

Tymże sposobem można by sobie postąpić, iakizkolwiek byłby ułamek mający jedność za licznika, a liczbę całkowitą za Mianownika, i ukazujący część reszty majątku pozostałego, przypadającą na drugą część działu każdego dziecięcia. Niechby np. ta druga część działu każdego dziecięcia

oznaczona była ogólnie przez  $\frac{1}{n}$  reszty. Na najmłodszé dziecię ta

drugą część nie przypadnie, ale tylko weźmie tylé razy  $a$ , ilé jest dzieci.

Pierwszą część przedostatniego dziecięcia, zawierać będzie tylé razy  $a$ , mniej jedném  $a$ : przeto na drugą część témuz dziecięciu przypadnie  $a$ .

A że ta druga część jest  $\frac{1}{n}$  reszty majątku, przed wzięciem

téjże części; więc ta reszta majątku przed wzięciem téj części była  $na$ , po wzięciu zaś zostanie  $a$ , wzięté razy  $n - 1$ , albo  $(n - 1)a$ , na dział najmłodszego dziecięcia.

Liczba dzieci . . . . .  $n - 1$ .

Dział każdego dziecięcia  $(n - 1)a$ .

Majątek oycowski . . . . .  $(n - 1)^2 a$ .

Pierwszą część działu najstarszego dziecięcia . . . . .  $a$ .

Zostaie się . . . . .  $a(nn - 2n)$ .

2gą część działu tegoż . . . . .  $a(n - 2)$ .

Dział tego dziecięcia . . . . .  $a(n - 1)$ .

Zostaie się majątku  $a(n - 1)(n - 2)$ .

albo . . . . .  $a(nn - 3n + 2)$ .

1wszą część działu 2go dziecięcia . . . . . 2a.

Zostaie się majątku . . . . .  $a(nn-3n)$ .

2gą część działu tegoż . . . . .  $a(n-3)$ .

Dział tego dziecięcia . . . . .  $a(n-1)$ .

Zostaie się majątku . . . . .  $a(n-1)(n-3)$ .

albo  $a(nn-4n+3)$ .

1wszą część działu 3go dziecięcia . . . . . 3a.

Zostaie się majątku . . . . .  $a(nn-4n)$ .

2gą część działu tegoż . . . . .  $a(n-4)$ .

Dział tego 3ciego dziecięcia . . . . .  $a(n-1)$ .

Zostaie się majątku . . . . .  $a(n-1)(n-4)$ .

albo  $a(nn-5n+4)$ . I t. d.

125. Uwaga stosowna do własności liczb kwadratowych, a z poprzedzającego Zadania wypadać.

Liczbę kwadratową uważać można, iako równą pierwiątkowi iey wziętemu tyle razy, ile ten pierwiastek zawiera w sobie jedności, albo też uważać ją można, iako równą tylu paróm liczb, równym pierwiątkowi kwadratu, ile ten pierwiastek ma jedności. A w szczególności wszystkie té pary uważać można, iako złożone ze dwóch wyrazów czyniących dwa Ciągi (Series,) z których jeden rośnie od 1, aż do ważności pierwiastku, przez różnicę równą jedności: drugi zaś zmniejsza się przez różnicę także równą jedności, zaczynając od liczby mniejszey jednością od pierwiastku, aż do zera. Takie będą następujące Ciągi:

1, 2, 3, 4, 5, . . . . .  $n-3, n-2, n-1, n-0$ .  
 $n-1, n-2, n-3, n-4, n-5, . . . . . 3, 2, 1, 0$ .

Ponieważ ze dwóch wyrazów składających jedną parę wyraz jeden jest pod wyrazem drugim, a summa dwóch wyrazów każdej takiéj pary jest  $n$ ; gdy tedy i liczba par będzie  $n$ , summa wszystkich par razem będzie  $nn$ .

Od téj summy odjąwszy summę iekielkolwiek liczby par następnych po sobie (zaczynając od 1wszey pary,) i oraz odjąwszy pierwizy wyraz pary następującej, a resztę podzieliwszy przez liczbę jednością większą od liczby par

Y

wszyst.

wszystkich, to jest przez  $n+1$ ; wieloraz będzie drugim wyrazem tej pary następującej.

Weźmy liczbę par  $m$ , summa tych par będzie  $mn$ ; pierwszy wyraz pary następującej będzie  $m+1$ . Odiawszy od summy par wszystkich  $mn$  tę sumę  $mn$ , wraz z pierwszym wyrazem pary następującej  $m+1$ , to jest odiawszy  $mn + m + 1$  od  $mn$ ; zostanie  $m - mn - m - 1$ , albo  $(m-1) - (mn+m)$  albo  $(n-1)(n+1) - m(n+1)$  albo  $(n+1)(n-m-1)$  albo  $(n+1)(n-(m+1))$ .

Podzieliwszy tę resztę przez  $n+1$ ; wieloraz będzie  $n-(m+1)$  a ten jest drugim wyrazem pary mającej za pierwszy wyraz  $m+1$ .

126. Zadanie II. Znaleźć wzór ogólny do rozwiązania zagadnień ze dwiema niewiadomymi.

Niech będą dwa równania: 
$$\begin{cases} mx + ny = a. \\ px + qy = b. \end{cases}$$

Trzeba wyznaczyć niewiadomych  $x$ ,  $y$ , wartość w ilościach wiadomych  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ .

Rozmnożywszy strony pierwszego równania przez  $p$ , strony zaś drugiego przez  $m$ .

będzie 
$$\begin{cases} mpx + npy = ap. \\ mpx + mny = mb. \end{cases}$$
  
Odiawszy; będzie 
$$\begin{aligned} npy - mny &= ap - bm. \\ \text{albo } y(np - mq) &= ap - bm. \end{aligned}$$
  
a zatem 
$$y = \frac{ap - bm}{np - mq}.$$

Rozmnożywszy zaś strony pierwszego równania przez  $q$ , a strony drugiego przez  $n$ .

będzie 
$$\begin{cases} mqx + nqy = aq. \\ npx + nqy = bn. \end{cases}$$
  
Odiawszy pierwsze to równanie od drugiego,  
będzie 
$$npx - mqx = bn - aq.$$
  
albo 
$$x(np - mq) = bn - aq.$$
  
a zatem 
$$x = \frac{bn - aq}{np - mq}.$$



Sprawdzenie.  $mx = \frac{bmn - amq}{np - mq}$   
 $anp - bmn.$

$ny = \frac{np - mq}{anp - amq}$

$mx + ny = \frac{np - mq}{np - mq} = a \left( \frac{np - mq}{np - mq} \right) = a.$

$px = \frac{bnp - apq}{np - mq}$   
 $apq - bmq$

$qy = \frac{np - mq}{bnp - bmq}$

$px + qy = \frac{np - mq}{np - mq} = b \left( \frac{np - mq}{np - mq} \right) = b.$

Należy ten wzór przystosować do wielu przykładów liczebnych.

Co się tycze Zagadnień ze trzema, ze czterema i t. d. niewiadomymi, ponieważ wzory do ich rozwiązania są dłuższe i zawilższe, a przystosowania rzadkie (\*) dosyć będzie dać tu jeden przykład pół ogólny.

127. Zadanie 12. Znaleźć trzy ilości  $x, y, z$ , takie, aby pierwszą złączoną z połową summy dwóch innych, czyniła  $a$ , aby drugą złączoną z trzecią częścią summy dwóch innych, czyniła  $b$ , i aby trzecią, złączoną z czwartą częścią summy dwóch innych czyniła  $c$ .

Wprowadźmy czwartą niewiadomą  $f$ , dla wyrażenia summy niewiadomej trzech ilości  $x, y, z$ . Wypadną trzy następujące równania:

$x + \frac{1}{2}(f - x) = a.$

$y + \frac{1}{3}(f - y) = b.$

$z + \frac{1}{4}(f - z) = c.$

albo  $x + f = 2a.$

$2y + f = 3b.$

$3z + f = 4c.$

(\*) Obacz w téj mierze przydatek do początków, o liniach krzywych w Xiedze Jmé P. CRAMERA dawniejszy Profesora Matematyki w Genewie. Tytuł Xiedzi *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes.*

Rozmnożymy strony pierwszego równania przez 6, drugiego przez 3, trzeciego przez 2, będzie

$$6x + 6f = 12a.$$

$$6y + 3f = 9b.$$

$$6z + 2f = 8c.$$

Dodawszy te trzy równania, będzie

$$6f + 11f = 12a + 9b + 8c.$$

albo  $17f = 12a + 9b + 8c.$

$$12a + 9b + 8c$$

$$f = \frac{12a + 9b + 8c}{17}.$$

17

$$x = 2a - f = 2a - \left( \frac{12a + 9b + 8c}{17} \right) = \frac{22a - 9b - 8c}{17}.$$

$$2y = 3b - f = 3b - \left( \frac{12a + 9b + 8c}{17} \right) = \frac{-12a + 42b - 8c}{17}.$$

$$y = \frac{-6a + 21b - 4c}{17}.$$

$$3z = 4c - f = 4c - \left( \frac{12a + 9b + 8c}{17} \right) = \frac{-12a - 9b + 60c}{17}.$$

$$z = \frac{-4a - 3b + 20c}{17}.$$

17

Gdyby wszystkie ilości  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , były równe, tedyby było

$$x = \frac{5}{17} a.$$

$$y = \frac{1}{17} a.$$

$$z = \frac{13}{17} a.$$

*Przykład.* Niech będzie  $a = 17$ .

tedy  $x = 5$ .

$$y = 1.$$

$$z = 13.$$

Co łatwo możemy sprawdzić.

## R O Z D Z I A Ł V.

O Proporcjach Arytmetycznych i Geometrycznych,  
ogólnie uważanych.

128. Gdy dwie ilości przyrównujemy jedną do drugiej, chcąc wiedzieć ich różnicę; wtedy mówi się, iż się zatrudniamy około ich *Stosunku Arytmetycznego*. Co z takiego przyrównywania wypada, to jest różnica między temi dwiema ilościami, nazywa się *Wykładnikiem* tego stosunku.

I tak niech będą dwie ilości  $a$ , i  $b$ , dwoma do przyrównywania wyrazami: wyrażenie to  $a - b$ , albo  $b - a$ , będzie wykładnikiem stosunku ich Arytmetycznego, podług tego iak będzie  $a$ , większe czy mnieysze względem  $b$ .

W Stosunku Arytmetycznym wyraz który się pierwszy pisze, nazywa się *Poprzednikiem*, drugi *Następnikiem*.

Mówi się, iż dwa stosunki Arytmetyczne są równe, gdy będą równe ich wykładniki. I tak mając dwie ilości  $a$ , i  $b$ , których różnica  $a - b$ , i dwie ilości  $c$ , i  $d$ , których różnica jest  $c - d$ : jeżeli  $a - b = c - d$ , tedy stosunki Arytmetyczne  $a$ , do  $b$ , i  $c$ , do  $d$ , nazywają się równymi: i o czterech tych ilościach  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , mówi się, że czynią *Proporcję Arytmetyczną*.

129. *Twierdzenie I.* Gdy cztery ilości czynią proporcję Arytmetyczną, suma dwóch skrajnych, równa się sumie dwóch średnich.

Niech będzie  $a - b = c - d$ .

tedy  $a + d = b + c$ .

*Dowódzenie.* Ponieważ podług przypuszczenia jest

$a - b = c - d$ , więc dodawszy do obu dwóch stron

$b + d$ , będzie

$a - b + b + d = c - d + b + d$ .

to jest summy  $a + d$ , i  $c + b$ , będą równe.



130. *Twierdzenie 2.* Wzajemnie, jeżeli summa dwóch jakich ilości równa się summie dwóch innych; tedy można wziąć dwie pierwsze ilości za dwa skrajne, a dwie drugie ilości za dwa średnie wyrazy proporcji Arytmetycznej.

Niech będzie  $a + d = b + c$ .

tedy  $a - b = c - d$ .

*Dowódzenie.* Przez przypuszczenie, jest

$a + d = b + c$ ; więc odjąwszy  $b + d$  od obudwóch stron będzie

$a + d - b - d = b + c - b - d$ , to jest reszty  $a - b$ , i  $c - d$  będą równe; a zatem cztery ilości  $a, b, c, d$ , czynić będą proporcją Arytmetyczną.

131. *Wnioſki.* Gdy cztery jakie ilości czynią proporcją Arytmetyczną; tedy można odmienić miejsce dwóm średnim, albo dwóm skrajnym wyrazom, albo téż położyć dwa średnie, na miejscu dwóch skrajnych, a dwa skrajne, na miejsce dwóch średnich, a proporcją wszelako zachowaną będzie: ponieważ przypuściwszy raz że summy dwie skrajnych i średnich są równe; té jednolajne zawsze będą przy tych wszystkich odmianach.

W przypadku szczególnym, w którym dwa średnie wyrazy są równe, proporcją nazywają się *ciągłą*, (continua) i summa dwóch skrajnych równa jest w tym razie średniemu dwa razy wziętemu: średni zaś równy jest połowie summy dwóch skrajnych. Nazwawszy tedy przez  $f$ , połowę summy dwóch ilości, a przez  $d$ , różnicę każdą z tych dwóch ilości od połowy summy; té trzy ilości  $f + d, f, f - d$ , czynić będą proporcją Arytmetyczną ciągłą.

Maąc dané trzy ilości proporcji Arytmetycznej, znajdziemy czwartą, odjąwszy ilość pierwszą od summy dwóch średnich. Jakoż jeżeli jest  $a - b = c - d$ , tedy  $a + d = b + c$ : odjąwszy zaś  $a$ , po obu stronach, będzie  $d = b + c - a$ .

132. Gdy dwie ilości przyrównujemy jedną do drugiej chcąc wiedzieć ile razy jedna z nich zawiera w sobie drugą; wtedy mówi się, iż się zatrudniamy około ich *stosunku Geometrycznego*. Co z takiego przyrównywania wypada, to jest Wieloraz z podzielenia jednej z tych ilości przez drugą, nazywają się *Wykładnikami tego stosunku*.

I tak przyrównyując tym końcem do siebie dwie liczby 8, i 4, zatrudniałibymy się w samej rzeczy stosunkiem Jeometrycznym. Liczba 2, z takowego przyrównania wypadająca na wieloraz, zwalaby się *Wykładnikiem* tego stosunku.

Ze dwóch wyrazów, które tak przyrównywamy do siebie, pierwszy nazywá się *Poprzednikiem*, drugi *Następnikiem*.

Wykładnik tedy takiego stosunku może być aważany, iak liczba *oddzielná*, (abstractus) toiest, iak liczba oznaczająca tylko, ile razy dwie ilości, które przyrównywamy zawierają się jedna w drugiej: tak właśnie, iak Wieloraz w dzieleniu, iest także liczbą oddzielną, gdy dwa wyrazy dzielenia, są ilościami jednakowego gatunku.

Gdy Wykładniki dwóch stosunków są równe, wtedy mówi się, że té dwa stosunki są równe: iakięgożkolwiek zaś gatunku będą dwa wyrazy iednego z tych stosunku; tedy dwa wyrazy drugiego stosunku, mogą być, albo tego samego, albo téż i innego gatunku.

Możná jednak wystawić sobie i dwa iakiękolwiek wyrazy stosunku, iak liczby oddzielne, a to dzieląc każdy z tych dwóch wyrazów, na części równe sobie, i uważając liczbę tych części, zawierających się w jednym i w drugim stosunku. I tak niechby dwa np. czasy zawierały w sobie iedną 5 godzin, a drugi 7 godzin, té dwa czasy mieć się do siebie będą, iak dwie liczby 5 i 7, toiest stosunek tych dwóch czasów, ténże sam będzie, co i stosunek dwóch liczb 5 i 7.

Arytmetyka i Jeometrya podały wiele zdarzeń zatrudniania się równością stosunków dwóch Jeometrycznych, z których wyrazy iednego były odmiennego gatunku, od wyrazów drugiego. Wykładać to samo teraz będziemy sposobem ogólniejszym, przywodząc ilości wchodzić mające w działania, do wyrazów liczebných, które przez ogólne znaki nazwiemy.

Każdy stosunek Jeometryczny uważanym być może, iak ułomek, którego Licznik iest poprzednikiem, a Mianownik następnikiem. Wielkość także ułamku, którą oznaczá wieloraz z pierwszego wyrazu, przez drugi odpowiedá wielkości wykładnika.

Stąd wypadá, że można rozmnóżyć lub podzielić obadwa wyrazy stosunku, przez téż samą liczbę, a wykładnik iego, a zatém i wielkość przez to się nieodmieni.

Gdy dwa stosunki Jeometryczne, są równe, wtedy mówi się, że ich wyrazy składają *proporcją Jeometryczną*; toiest mówi się, że pierwszy Poprzednik, tak się má do twego Następnika, iak i drugi Poprzednik do swego także Następnika. I tak

I tak niechby  $a$ , i  $b$ , były wyrazy iednego stosunku,  $c$ , i  $d$  drugiego, równego pierwszemu: tedy równość tych dwóch stosunków, czyli proporcya Jeometryczna między temi 4ma wyrazami zachodząca tak się oznaczy

$$a : b = c : d.$$

133. *Twierdzenie I.* W każdej proporcji Jeometrycznej wieloczyn dwóch wyrazów skrajnych, równa się wieloczynowi dwóch średnich.

Jeżeli  $a : b = c : d$ ; tedy  $ad = bc$ .

*Dowódzenie.* Przez przypuszczenie  $a : b = c : d$ .  
 A że też jest  $a : b = ad : bd$ .  
 $c : d = bc : bd$ .  
 Więc  $ad : bd = bc : bd$ .

Że zaś dwa następni tej ostatniej proporcji są równe; więc równe także będą, i dwa iey Poprzedni, toieft  $ad = bc$ .

134. *Twierdzenie 2.* Wzajemnie: jeżeli dwa Wieloczyny są równe: tedy wzięwszy dwa Czynniki iednego za skrajne, a dwa Czynniki drugiego za średnie; cztery te wyrazy tak ułożone uczynią proporcją Jeometryczną.

Jeżeli  $ad = bc$ , tedy  $a : b = c : d$ .

*Dowódzenie.* Ponieważ  $ad = bc$ .  
 więc będzie  $ad : bd = bc : bd$ .  
 A że iest  $ad : bd = a : b$ .  
 $bc : bd = c : d$ .  
 więc  $a : b = c : d$ .

135. *Wniosek I.* Czwarty wyraz proporcji Jeometrycznej, mając dane trzy pierwsze, znajdzie się, dzieląc Wieloczyn dwóch średnich, przez wyraz pierwszy: bo ponieważ z proporcji  $a : b = c : d$  wypada  $ad = bc$ ; więc podzieliwszy obie strony przez  $a$ , będzie  $d = \frac{bc}{a}$ .

Na tym wniosku zasada się reguła trzech, wyłożona w Arytmetyce przez szczególne nad każdym przypadkiem rozumowanie.

136. *Wniosek 2.* Mając daną Proporcją Jeometryczną, można odmiennie mieścić wyrazom iey średnim lub skrajnym: albo też położyć wyra-



zy średnie, na miejscu skrajnych, a skrajne na miejscu średnich, a proporcya wszelako będzie zachowana: bo przy tych wszystkich odmianach, wieloczyn z wyrazów skrajnych, równy zawsze będzie wieloczynowi z wyrazów średnich tak, iak w pierwszey daney proporcji.

## WZÓR TYCH ODMIÁN.

Proporcya daná	$a : b = c : d.$
Proporcye z niéy wniesione.	1. $a : c = b : d.$
	2. $b : a = d : c.$
	3. $b : d = a : c.$
	4. $c : d = a : b.$
	5. $c : a = d : b.$
	6. $d : c = b : a.$
	7. $d : b = c : a.$

137. *Twierdzenie 3.* W kaźdey proporcji Jeometryczney można uczynić następujące odmiany.

*Summa albo różnica dwóch wyrazów pierwszego stosunku, tak się ma do Poprzednika lub do Następnika tegoż stosunku; iak summa, albo różnica dwóch wyrazów drugiego stosunku, do Poprzednika lub Następnika tego drugiego stosunku.*

1. Jeżeli  $a : b = c : d.$

tedy  $a + b : b = c + d : d.$  Ta odmiana nazywa się: przez *dodanie* albo *składanie*, (addendo, albo componendo.)

Jakoż  $a + b$ , zawiera w sobie  $b$ , raz więcej, niżeli samo  $a$ , zawiera w sobie toż  $b$ ; także  $c + d$ , zawiera w sobie  $d$ , raz więcej, niżeli samo  $c$ , zawiera w sobie toż  $d$ : toteż, tak Wykładnik stosunku  $a + b$ , do  $b$ , iak i wykładnik stosunku  $c + d$ , do  $d$ , jest większy jednością od Wykładnika stosunku  $a$ , do  $b$ , i od Wykładnika stosunku  $c$ , do  $d$ . A że wykładniki stosunków dwóch ostatnich, są równe, podług przypuszczenia; więc wykładniki stosunków pierwszych, będą równe: a zatem  $a + b : b = c + d : d.$

2.  $a - b : b = c - d : d.$  Ta odmiana nazywa się: przez *odejmowanie*, albo przez *dzielenie*, (subtrahendo, albo dividendo.)

Rozumowanie jest to samo, co wyżej. ztąd tylko różnicą, że Wykładniki stosunków  $a - b$ , do  $b$  i  $c - d$ , do  $d$ , są obadwa mniejsze jednością od wykładników stosunków,  $a$ , do  $b$ , i  $c$ , do  $d$ , które to wykładniki wzięte są za równe.

3.  $a + b : a = c + d : c.$

*Dowodzenie.* Ponieważ  $a : b = c : d$ ; więc też będzie (§. 136 odmiana 2)  $b : a = d : c.$

a zatem (podług 1.)  $b + a : a = d + c : c.$

4.  $a - b : a = c - d : c.$  Dowodzenie jest to samo, iak 3. podług 2.

5.  $a + c : b + d = a : b.$

*Dowodzi:* Ponieważ  $a : b = c : d.$

więc też  $a : c = b : d.$

a zatem  $a + c : a = b + d : b.$

albo  $a + c : b + d = a : b.$

6.  $a - c : b - d = a : b.$  Dowodzenie to samo prawie co wyżej.

138. *Uwaga.* Piąte z tych podań rozciągnąć można do iakiękolwiek liczby stosunków Geometrycznych równych; to jest mając iakąkolwiek liczbę tychże stosunków równych, zawsze summa wszystkich Poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszystkich Następników; iak poprzednik ieden któregokolwiek z tych stosunku, do swęgo następnika.

Jakoż niech będzie  $q$ , Wykładnik iednego z tych stosunku, będzie też i każdego innęgo stosunku równęgo pierwzemu Wykładnikiem także  $q$ : a zatem ieżeli następniiki tych stosunków są,  $a, b, c, d, e, f$ , i t. d. poprzedniki ich będą,  $aq, bq, cq, dq, eq, fq$ , i t. d.

Summa wszystkich poprzedników będzie  $aq + bq + cq + dq + eq + fq$  i t. d. to jest  $q (a + b + c + d + e + f, \text{ i t. d.})$  a zatem wykładnik stosunku summy wszystkich poprzedników, do summy wszystkich następników będzie  $q$ , to jest tén sam, który jest wykładnikiem stosunku, któregokolwiek z poprzedników pojedynczo wziętych do ięgo następnika.

• 139. *Twierdzenie 4.* Niech będą dwie proporcye Geometryczne.

$$a : b = c : d.$$

$$e : f = g : h.$$

Wyrazy ich odpowiedające sobie rozmnożywszy iedné przez drugie, Wieloczyny  $ae, bf, eg, dh$ , będą także w proporcyi.

*Dowodzenie.* Ułomki  $\frac{a}{b}$  i  $\frac{c}{d}$ , które są wykładnikami dwóch

stosun-

stosunków czyniących pierwszą proporcją są równe: dwa także ułamki  $\frac{e}{f}$  i  $\frac{g}{h}$ , które są wykładnikami stosunków czyniących drugą proporcją, są równe: będzie tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{d} \\ \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

Więc Wieloczyn ułamków, które są pierwszymi stronami tych dwóch równań będzie równy Wieloczynowi ułamków, które są drugimi stronami tychże równań: to jest  $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$ , a ułożywszy to równanie w proporcją, będzie  $ae : bf = cg : dh$ .

140. Wyrazy téy ostatniéy proporcyi są wyprowadzone z Wieloczynów, wykładników należących do stosunków dwóch pierwszych proporcyy: i przez to, wykładniki stosunków, z których się składa ta ostatnia proporcya, nazywają się składaniami z stosunków dwóch pierwszych proporcyy. (Obacz w Jeometrii Części I. na karcie 217, i następujących, to, co się tam mówiło o stosunkach składanych w tym razie, gdy wyrazy stosunków mających się składać, nie są ilościami liczebnymi, w którychby można oznaczyć, albo wykonać mnożenie.).

141. Podobnie dowieśdźby można, że mając trzy, cztery, pięć i t. d. proporcyy, a wyrazy ich odpowiadające sobie, iedné przez drugie cią-gło rozmnożywszy; Wieloczyny, które z takiego rozmnożenia wypadną, będą także w proporcyi: przeto stosunek składany, ze wszystkich pierwszych stosunków, każdéy w szczególności proporcyi, równy będzie stosunkowi składanemu z drugich stosunków téżéy proporcyi: a zatem iakążkolwiek byłaby liczba stosunków równych, po dwa branych, zawsze stosunki z nich składane będą równe.

142. Náywiększéy wági dla wielu użytecznych przystósowań, jest ten przypadek, w którym wszystkie do składania, stosunki są równe. W takim razie, jeżeli stosunków liczba jest 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. Stosunek z nich

Z 2 . . . . . skła-



składany, nazywają się dwumnożnym, tróymnożnym, czwórmnożnym, pięciomnożnym, sześciomnożnym, i t. d. jednego z tych stosunku. A jeżeli nie tylko są równe té do składania stosunku, ale nad to, jeżeli wszystkie ich wyrazy są jednakowe; tedy wyrazy stosunku składanego będą té same, co i stosunki jednego z składających, wziętego 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. razy za Czynnika.

143. To, co wypada z rozmnożenia jakiej liczby wziętej kilka lub więcej razy za Czynnika, nazywać można *Mnogością* téj liczby. (Po Łacinie nazywają się to *Dignitas*, albo *Potentia*.) I tak robi się 2gą, 3cią, 4tą, 5tą, 6, . . . ntą *Mnogość* liczby, podług tego jak będzie wzięta czy 2 razy, czy 3, 4, 5, 6, . . . czy ogólnie  $n$ , razy za czynnika. Ilości tedy następujące  $aa$ ,  $aaa$ ,  $aaaa$ ,  $aaaaa$ ,  $aaaaaa$ , i t. d. są 2gą, 3cią, 4tą, 5tą, 6tą, i t. d. *Mnogością* liczby  $a$ . Dla skrócenia zaś tak się piszą  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^4$ ,  $a^5$ ,  $a^6$ , i t. d. Liczby 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w górze napisane, oznaczają liczbę tylu razy, ile razy wzięło się  $a$ , za Czynnika. Nazywają się té liczby Wy-

kładnikami. W ogólności mówiąc, wyrażenie to  $a$  oznacza, iż trzeba wziąć  $a$ , razy  $n$ , za Czynnika, i nazywają się *Mnogością* ntą ilości  $a$ .

Stosunek więc, który zachodzi między temiż samemi *Mnogościami* dwóch liczb, składa się z tylu stosunków równych stosunkowi tych dwóch liczb, ile wykładnik tych *Mnogości* zawiera w sobie jedności. I tak stosunek  $a^2$ , do  $b^2$ , składa się ze dwóch stosunków, równych stosunkowi  $a$ , do  $b$ . Stosunek  $a^3$ , do  $b^3$ , składa się ze trzech stosunków równych stosunkowi  $a$ , do  $b$ .

do  $b$ : a w ogólności stosunek  $a$ , do  $b$ , składa się z  $n$  stosunków równych stosunkowi  $a$ , do  $b$ .

144. Cokolwiek tu dotąd się mówiło, wszystko to było w tém mniemaniu, że dwa jednego stosunku wyrazy miały spólną miarę, tak dalece, że stosunek tych dwóch wyrazów mógł być oznaczonym przez liczby: a zatem że i wszystkie inne stosunki równe tamtemu mogły także być przez liczby wyrażone, i że wykładnikami tych stosunków były liczby spólmierné, i równe. Jednakże widzieliśmy w Jeometrii częste przykłady ilości niespólmiernych: wyciąganie pierwiastków kwadratowych i sześciennych, podawało nam wiele takich ilości, których stosunek nie mógł być przez liczby wyrażony. Aleśmy téż oraz widzieli, że wszystkie podania względem proporcjonalności, między ilościami spólmiernemi były równie prawdziwe i w przypadku

padku niespółmierności: np. że te Równoległo-boki i te Graniałto-flupy, które jednakowe mają podławy, były względem siebie jak ich wysokości, gdy te wysokości były spółmierné; ale oraz te Równoległo-boki, i te Graniałto-flupy były także w tym samym do siebie stosunku, gdy ich wysokości były niespółmierné. Dowiodłszy, iż Trójkąty równokątne miały boki względem siebie proporcjonalné, gdy dwa ich boki odpowiadające sobie były spółmiernémi; pokazałismy oraz, że taż proporcjonalność była i wtedy zachowana, gdy dwa ich boki odpowiadające sobie były niespółmiernémi. i t. d.

Sposób dowodzenia tych podañ, może byđz ogólnie przystosowanym, do proporcjonalności iakichkolwiek ilości niespółmiernych, gdy tylko ta proporcjonalność znajduie się w ilościach spółmiernych. I tak, ponieważ miéysca od ciął przebieżoné z jednakową prędkością, mają się do siebie, iak czasy przez które biegną te ciała, gdy czasy są spółmierné; więc téż i miéysca te będą do siebie iak te czasy, chociażby czasy były niespółmierné. Aby to ieszczé tém widoczniéj okazać, można powtórzyć niektóre przykłady, iuż w piérwizéj części Jeometrii wyłożoné.

I tak gdy podławy dwóch prostokątów, jednakową mających wysokość są spółmierné, a podzielimy ié na iakąkolwiek liczbę części sobie równych, których jedna podława zawierać będzie liczbę  $m$ , a drugą liczbę  $n$ , powierchnie téż tych prostokątów będą mogły byđz podzieloné, na liczbę  $m$ , i  $n$ , części sobie równych: i iako stosunek dwóch podław tych prostokątów iest téżné sam, co i liczb spółmiernych  $m$ , i  $n$ ; tak téż stosunek ich powierchni będzie téżné sam, co tych dwóch liczb  $m$ , i  $n$ .

Jeżeli zaś podławy są niespółmierné, i jedna z nich, a zatém i Prostokąt, do którego należy dzieli się na iakąkolwiek liczbę  $m$ , części równych; tedy gdy drugą podławą, więcéy niż  $n$ , takich części, a mniéy, niż  $n + 1$  zawierać będzie; powierchniá téż zgo prostokąta, zawierać więcéy niż  $n$ , a mniéy niż  $n + 1$ , takich części, na iakié podzieloná była powierchniá piérwszego prostokąta. I kiedykolwiek cztery ilości są takie, że stosunek piérwszégó do drugiéy, równá się stosunkowi trzeciéy, do czwartéy, gdy piérwszą z drugą, a zatém i trzecią z czwartą, są spółmierné; iakąkolwiek byłaby liczba spółmierná, wyrażająca stosunek dwóch piérwszych, tedy i w tym razie, gdzieby dwie piérwsze ilości były niespółmierné, można przybliżyć do prawdziwego, wyrażenie stosunków: tak dalece, że, oznaczwszy poprzednika piérwszego stosunku przez liczbę iaką całkowitą, liczba, któraby oznaczała prawdziwego iego Następnika, zawierałaby się, między dwiema liczbami różniącemi się od siebie jednością: a podzieliwszy poprzednika drugiégo stosunku,

na części równe, których liczba równałaby się liczbie części pierwszego poprzednika, następnik także tego drugiego stosunku, oznaczyłby się przez liczbę zawartą między temi samemi dwiema liczbami, między którymi zawierała się liczba części, na które podzielony był pierwszy Następnik.

145. *Twierdzenie.* Niech będą cztery ilości  $A, B, C, D$ , z których  $A, B$ , są nieśpółmierné, i  $C, D$ , także nieśpółmierné.

Podzielmy  $A$ , na iakąkolwiek liczbę  $m$ , części równych, z których każda niech będzie  $a$ .

Podzielmy także i  $C$ , na tę samą liczbę  $m$ , części równych, z których każda niech będzie  $c$ .

Niech  $B$ , zawiera więcej niż  $n$ , a mniej niż  $n+1$  takich części iaką jest  $a$ : niech  $D$ , zawiera także więcej niż  $n$ , mniej zaś niż  $n+1$  takich części iaką jest  $c$ : i niech się to zawsze prawdzi, iakieźkolwiek liczby znaczyć będą litery  $m$ , i  $n$ .

*Té cztery ilości  $A, B, C, D$ , będą Geometrycznie proporcjonalné.*

Gdyby między temi czterema ilościami nie zachodziła proporcya Geometryczná; tedyby ieden z tych stosunków  $A$ , do  $B$ , albo  $C$ , do  $D$ , był większy od drugiego: a zatem trzebaby, powiększyć następnik stosunku, z tych dwóch większego, aby téż stosunek zmniejszył i uczynić równym mniejszemu stosunkowi. Niechże więc, iesli to bydz może, stosunek np. drugi, to jest  $C$ , do  $D$ , będzie większy od stosunku pierwszego  $A$ , do  $B$ ; i niechby, dáyiny to, miała mieyscé ta proporcya,  $A : B = C : E$  wziąwszy  $E$ , za ilość większą od  $D$ .

Jakieźkolwiek byłaby różnica ilości  $D$ , od  $E$ , można zawsze podzielić ilość  $C$ , na tylé części równych, aby każda z nich mnieyszą była od téj różnicy. Niech  $m$ , oznaczá liczbę tych części, a niech  $c$ , oznaczá każdą z tych części. Podzielmy  $A$ , na tyléż części równych, i każdą z nich oznaczmy przez  $a$ . Weźmy część  $c$ , tylé razy, aby summa, która stąd urosnie, przybliżała się iak náybardziéy do ilości  $D$ , ale iéy nie przewyższała: za dodaniem zaś iednéy ieszcze części  $c$ , aby się ta summa większą stała od  $D$ , a mnieyszą od  $E$ , (ponieważ wzięliśmy  $c$ , za ilość mnieyszą od różnicy między  $E$ , i  $D$ .)

Niech  $n$ , i  $n+1$ , oznaczają ilé razy się brało część  $c$ , przed przydaniem iednego ostatniego  $c$ , i po przydaniu. Weźmy téż tylé razy ilość  $a$ . Ilosć  $B$ , będzie przez przypuszczenie, większą niżeli  $na$ , mnieyszą iednak niżeli  $(n+1)a$ .

Ponieważ



Ponieważ te cztery ilości  $ma$ , czyli  $A$ ;  $(n+1)a$ ;  $mc$ , czyli  $C$ ; i  $(n+1)c$ , są spójniernie; wypadnie więc proporcya:

$$A : (n+1)a = C : (n+1)c.$$

A że przez przypuszczenie ma być  $A : B = C : E$ .

$$\text{Albo } B : A = E : C.$$

$$\text{więc } B : (n+1)a = E : (n+1)c.$$

Że zaś przypuściliśmy, iż poprzednik  $B$ , jest mniejszy, niżeli iego następnik  $(n+1)a$ ; więc też i poprzednik  $E$ , powiniénby być mniejszym od swégo następnika  $(n+1)c$ . A że przez dowodzenie, okazał się być większym; więc ta proporcya  $A : B = C : E$ , nie ma wtedy miejsca, gdy  $E$ , jest większe od  $D$ ; a zatem następnik  $D$ , stosunku drugiego téj proporcvi  $A : B = C : D$ , nie jest nadto mały względem swégo poprzednika  $C$ , to jest, stosunek ten drugi  $C$ , do  $D$ , nie jest nadto wielki. Można by dowieść takimi sposobem, że i następnik 1go stosunku nie jest nad to mały do zachowania proporcvi, czyli że stosunek pierwszy, nie jest nad to wielki.

Więc dwa stosunki  $A : B$ , i  $C : D$ , są równe.

Podanie poprzedzające może być i tak wyrażoném:

Jeżeli dwie ilości  $A$ , i  $B$ , tak jedna od drugiej zawisły, że wraz powiększają się, lub zmniejszają, i że gdy np.  $B$ , staje się  $= b$ , wtedy  $A = a$ .

$$\text{gdy } B = 2b, \text{ wtedy } A = 2a.$$

$$\text{gdy } B = 3b, \text{ wtedy } A = 3a. \text{ a w ogólności}$$

$$\text{gdy } B = nb, \text{ wtedy } A = na. \quad (\text{biorąc } n, \text{ za jaką}$$

kolwiek liczbę całkowitą;) w takim razie dwie ilości  $A$ , i  $B$ , powiększają się lub zmniejszają w proporcvi Geometrycznej, i jeżeli  $B$  zamiénia się na  $C$ , gdy  $A$ , zamiénia się na  $\alpha$ , tedy będzie  $\alpha : a = C : b$ .

146. Zadanie 1. Niech będą dane cztery ilości: trzeba znaleźć taką ilość, któraby do każdej z tamtych czterech dodana, uczyniła między niemi proporcya Geometryczną.

Niech będą te cztery ilości  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

Mianowanie. Niech będzie  $x$ , ilość szukaná, a zatem summy czterech będą

$$a + x, b + x, c + x, d + x.$$

$$\text{Warunek. } a + x : b + x = c + x : d + x.$$

Prze-

*Przeróba:* Przez dzielenie (§. 137)  $a-b:c-d=a+x:c+x$ .  
 więc . . .  $a-b-c+d:c-d=a-c:c+x$ .  
 i . . . . .  $a-b-c+d:a-b=a-c:a+x$ .  
 podobnie też  $a-b:c-d=b+x:d+x$ .  
 więc . . .  $a-b-c+d:c-d=b-d:d+x$ .  
 i . . . . .  $a-b-c+d:a-b=b-d:b+x$ .

Cztery tedy wyrazy proporcji których szukamy, będą następujące:

$$\frac{(a-c)(a-b)}{a-b-c+d}, \frac{(a-b)(b-d)}{a-b-c+d}, \frac{(a-c)(c-d)}{a-b-c+d}, \frac{(c-d)(b-d)}{a-b-c+d}$$

Stosunek rwszych dwóch wyrazów jest ten sam, co  $a-c$ , do  $b-d$ .

Stosunek 2gich dwóch wyrazów jest także ten sam, co  $a-c$ , do  $b-d$ .

Ilość zaś  $x$ , którą do każdéy ilości danéy dodadz trzeba będzie

$$\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$$

*Przykład.* Niech będzie  $a=3, b=5, c=9, d=14$ ;

będzie . . .  $bc=45; ad=42; bc-ad=3; a-b-c+d=$

$$3-5-9+14=17-14=3. \quad \frac{bc-ad}{a-b-c+d} = \frac{3}{3} = 1.$$

Dodawszy 1 do każdéy z czterech liczb 3, 5, 9, 14, wypadnie proporcya  $4:6=10:15$ .

*Uwaga.* Gdy  $b$ , i  $c$ , są równe, proporcya której szukamy, będzie ciągłą: a ilość którą dodadz przypadnie do každého ze trzech wyrazów  $a, b,$

$$d, \text{ będzie } \frac{bb-ad}{a-2b+d}$$

147. Zadanie 2. Niech będą dané boki  $a$ , i  $b$ , prostokąta: trzeba znaleźć taki kwadrat, aby powierzchnia tego prostokąta i kwadratu, były do siebie iak ich obwody.

*Mianowanie.* Niech będzie  $x$ , bok kwadratu szukaného.  
 Obwód jego będzie  $4x$ , a powierzchnia  $xx$ .

Waru-

*Warunek.*  $2a + 2b : 4x = ab : xx.$

*Przerabianie.* (Podzieliwszy przez 2, dwa 1wsze proporcji wyrazy)

$$a + b : 2x = ab : xx.$$

(Rozmnożywszy przez  $x$ , dwa pierwsze wyrazy)

$$(a+b)x : 2xx = ab : xx.$$

$$= 2ab : 2xx.$$

(Porównawszy dwa poprzedniki, dla równości dwóch

Następników)  $(a+b)x = 2ab.$

(Podzieliwszy przez  $a+b$ )  $x = \frac{2ab}{a+b}.$

Skąd wypada ta proporcja:

$$a + b : 2a = b : x.$$

albo nakoniec  $\frac{a+b}{2} : a = b : x.$

Więc bok szukany kwadratu, jest czwartą proporcjonalną do połowy summy boków prostokąta i do każdego z nich w szczególności. (Co do rozwiązania Jeometrycznego, obacz Jeometrię. Części I. §. 234, i 235.)

148. *Uwaga.* Z proporcji téj  $\frac{a+b}{2} : a = b : x$ , można la-

two wyznaczyć taką wartość jednego boku prostokąta, którego bok drugi jest nam już wiadomy, aby powierzechnie prostokąta i kwadratu danego, tak się miały do siebie jak ich obwody

Bo ponieważ wypada ta proporcja,  $a+b : a = 2b : x$ , więc  $b : a = 2b - x : x$ , albo  $2b - x : x = b : a$ . to jest bok prostokąta szukany będzie czwartą proporcjonalną do różnicy boku kwadratu, od danego boku w prostokącie dwa razy wziętego, i do boku tak kwadratu, iako téż i do tego samego wiadomego boku prostokąta.

*Przykład.* Niech będzie . . .  $a = 3, b = 6.$   
 $a = 4, b = 12.$

149. *Zadanie 3.* Niech będą dane trzy krawędzie  $a, b, c$ , w Równoległocieniu prostokątnym: trzeba znaleźć bok szóstokąta takiego, aby stosunek powierzechni Równoległocieniu, i szóstokąta równy był stosunkowi ich brytowności.

A a

Miano-



*Mianowanie.* Niech będzie  $x$ , bok szukany sześcianu.  
 Wyrażenie połowy powierzchni Równoległoscianu jest  $ab + ac + bc$ .  
 Wyrażenie jego bryłowości jest  $abc$ .  
 Wyrażenie połowy powierzchni sześcianu jest  $3xx$ .  
 Wyrażenie jego bryłowości jest  $x^3$ .

*Warunek:*  $ab + ac + bc : 3xx = abc : x^3$ .

*Przerób:* Rozmnożywszy pierwsze dwa wyrazy przez  $x$ , a drugie dwa przez 3, aby zrównać dwa następni; i zrównawszy dwa poprzedni, będzie  $x(ab + ac + bc) = 3abc$ .

(Podzieliwszy obie strony przez  $ab + ac + bc$ ,

$$x = \frac{3abc}{ab + ac + bc}$$

Rozwiąż:  $x = \frac{3abc}{ab + ac + bc}$ . Bok szukany sześcianu.

<i>Przykład.</i> $a = 6.$	}	$a = 141.$
$b = 9.$		$b = 188.$
$c = 15.$		$c = 235.$

150. Zadanie 4. Niech będzie dana wysokość walca prostego, i promień jego podstawy; trzeba wyznaczyć promień takiej kuli, aby cała powierzchnia walca i kuli, tak się miała jedna do drugiej, jak się mają ich bryłowości?

*Mianowanie.* Niech będzie  $a$ , wysokość daną Walca:  $r$ , promień podstawy jego:  $x$  promień szukany kuli.

Niech będzie  $\pi$ , okrąg koła, którego promień jest 1.

Okrąg koła mającego promień  $r$ , będzie  $\pi r$ .

Powierzchnią tego koła będzie  $\frac{1}{2}\pi r r$ .

Summa powierzchni dwóch podstaw Walca, będzie  $\pi r r$ .

Powierzchnią zaś jego krzywą będzie  $\pi r a$ .

Więc cała powierzchnia Walca, będzie  $\pi r r + \pi r a$ .

Bryłowość Walca, będzie  $\frac{1}{2}\pi r r a$ .

Okrąg wielkiego koła kuli szukanej, będzie  $\pi x$ .

Powierzchnia kuli, będzie . . . . .  $2\pi x x$ .

Bryłowość kuli będzie . . . . .  $\frac{2}{3}\pi x^3$ .

Warunek.  $\pi r r + \pi r a : 2\pi x x = \frac{1}{2}\pi r r a : \frac{2}{3}\pi x^3$ .

Przerabianie. (Podzieliwszy przez  $\pi$ , wszystkie wyrazy téj proporcji)  $r r + r a : 2 x x = \frac{1}{2} r r a : \frac{2}{3} x^3$ .

(Rozmnożywszy pierwsze dwa wyrazy proporcji przez  $\frac{1}{2}x$ )

$$\frac{1}{2}x(r r + r a) : \frac{2}{3}x^3 = \frac{1}{2}r r a : \frac{2}{3}x^3.$$

(Porównawszy dwa poprzedniki dla równości następników)

$$\frac{1}{2}x(r r + r a) = \frac{1}{2}r r a.$$

(Podzieliwszy przez  $r$ , obie strony równania)

$$\frac{1}{2}x(r + a) = \frac{1}{2}r a.$$

(Przywiódłszy dwa ułamki do jednakowego Mianownika, a potem go opuściwszy)  $2x(r + a) = 3r a$ .

(Podzieliwszy obie strony przez  $2(r + a)$ )

$$x = \frac{3r a}{2(r + a)}.$$

Rozwiązanie.  $x = \frac{3r a}{2(r + a)}$

Przykład. Niech będzie  $a = 2r$ , (taki Walec którego wysokość równa jest średnicy podstawy jego, nazywa się Walcem Archimedesa.) tedy

$$x = \frac{6r r}{2(3r)} = \frac{6r r}{6r} = r, \text{ co już w Geo-}$$

metryi Części II. §. 148 okazało się.

Niechby było  $r = 10$ .

$$a = 15.$$

$$3. 10. 15$$

$$\text{Będzie } x = \frac{2. 25}{2. 25} = 9.$$

Byłby więc w tym razie promień kuli  $= 9$ .

151. Uwaga. Z równania  $x = \frac{3r a}{2(r + a)}$  można wyprowadzić

ważność promienia  $r$ , podstawy Walca wyrażoną przez  $a$ , i  $x$ : można podobnie

Aa 2

dobnie wyprowadzić, i ważność wysokości  $a$ , w ważnościach  $r$ , i  $x$ ; to jest, mając daną kulę i promień podstawy Walca prostego lub jego wysokość, można wyznaczyć promień podstawy jego lub wysokość, tak, aby bryłowości tych dwóch brył, były do siebie, iak ich powierzchnie.

## ROZDZIAŁ VI.

### Zagadnienia drugiego Stopnia.

**W**yciąganie pierwiastku kwadratowego potrzebne do rozwiązania Zagadnień drugiego stopnia okazuje widocznie różnicę tychże Zagadnień, od Zagadnień pierwszego stopnia.

W Zagadnieniach Rozdziałów poprzedzających, ilości niewiadome mnożone były przez same tylko ilości wiadome, a jeżeli czasem (iak w Zagadnieniach 35, i następujących pierwszego Rozdziału) mnożyły się przez siebie same; tedy wyrazy takowe, albo w samych Mianowaniach ginęły, albo zaraz na początku przerabiania.

W Zagadnieniach zaś drugiego stopnia, wyrazy té, w które wchodzi ilości niewiadome mnożone przez siebie same, giną dopiero w Rozwiązaniu.

152. *Zadanie 1. Prostopąg którego bok ieden dwa razy iest tak wielki, iak bok drugi, má 72 stóp kwadr. w powierzchni. Jakiż są boki tego prostopąga?*

*Arytmetycznie.* Ponieważ długość tego prostopąga dwa razy iest tak wielka, iak szerokość; więc powierzchnią jego będzie dwa razy tak wielka, iak powierzchnią kwadratu jego szerokości: więc kwadrat szerokości dwa razy wzięty iest 72, a raz wzięty iest 36. Więc szerokość tego prostopąga wyrazi się przez liczbę, która przez siebie rozmnożoną, czyni 36, to iest, wyrazi się przez pierwiastek kwadratowy liczby 36. Takim zaś pierwiastkiem, iest liczba 6.

Szerokość prostopąga	6 stóp.
Długość	12.
Powierzchnia	72 stóp kw.

*Algic.*



*Algebraicznie. Mian:* Szerokość . . . . .  $x$ .  
 Długość . . . . .  $2x$ .  
 Powierzchnia . . . . .  $2xx$ .

*Warunek.*  $2xx = 72$ .

*Przerób:* (Podzieliwszy obie strony przez 2) . . .  $1xx = 36$ .  
 (Wyciągnąwszy pierwiastk kwadr:) . . .  $1x = 6$ .

*Rozwiązanie.*  $1x = 6$ . Szerokość szukaną.  
 Reszta jak wyżej.

*Inszé przykłady.* Znaleźć dwie liczby, z którychby jedna trzy razy była tak wielką, jak druga: a które rozmnożywszy jedną przez drugą, wypadłoby na Wieloczyn 75.

Znaleźć dwie liczby, z którychby jedna była  $\frac{2}{3}$  drugiey, a Wieloczyn ich 96.

153. Zadanie 2. Znaleźć takie trzy liczby, aby Wieloczyn  
 pierwszy przez drugą był . . . . . 18.  
 pierwszy przez trzecią . . . . . 24.  
 drugiey przez trzecią . . . . . 48.

*Arytmetycznie.* Gdy trzecią liczbę rozmnożymy osobno przez pierwszą, i osobno przez drugą liczbę, Wieloczyn w drugim razie, będzie dwa razy tak wielki, jak w pierwszym: a zatem drugą liczbą musi być dwa razy tak wielką, jak pierwszą. Że zaś Wieloczyn pierwszej liczby przez drugą jest 18; więc (podług pierwszego Zadania) kwadrat pierwszej liczby jest 9, pierwszą zatem liczbą jest 3, a druga 6. Trzecią jest wieloraz 24 przez 3, albo 48. przez 6. to jest 8.

Liczba pierwszą . . . . . 3.  
 . . . . . drugą . . . . . 6.  
 . . . . . trzecią . . . . . 8.

Wieloczyn pierwszy przez drugą . . . 18.  
 . . . . . pierwszy przez trzecią . . . 24.  
 . . . . . drugiey przez trzecią . . . 48.

*Algebraicznie. Mian:* Pierwszą liczbą . . . . .  $x$ .

Aa 3

Drugą

	18
Druga . . . . .	<u>x</u>
	24
Trzecia . . . . .	<u>x</u>
	432
Łączyn drugiey liczby przez trzecią	<u>xx</u>

*Warunek.*  $\frac{432}{xx} = 48.$

**Przerab:** (Rozmnożywszy obie strony przez  $xx$ )  $432 = 48xx$ .  
(Podzieliwszy przez  $48$ )  $\dots\dots\dots 9 = xx$ .  
(Wyciągnąwszy pierwiastk kwadr.)  $\dots\dots 3 = x$ .

**Rozwiązanie.**  $x = 3$ . Pierwszą liczbą, tak jak wyżej.

*Inszé przykłady. Znaleźć takie trzy liczby, aby Wieloczyn dwóch pierwszych był 12, dwóch skrajnych był 14, a dwóch ostatnich był 42.*

Znaleźć takie trzy liczby, aby Wieloczyn dwóch pierwszych był 96, dwóch skrajnych 120, a dwóch ostatnich 180.

Ogólnie. Niech będą wieloczyny dané  $a, b, c$ .

Mianowanie.	1 wszą liczba	$x$
		$a$
	2gą	$\frac{x}{b}$
		$b$
	3cią	$\frac{x}{ab}$
		$ab$
	Wieloczyn dwóch ostatnich	$xx$

Warunek.  $\frac{ab}{xx} = c.$

Przerób: (Rozmnożywszy obie strony przez  $xx$ )  $\frac{ab}{ab} = xx$   
 (Podzieliwszy obie strony przez  $c$ )  $\frac{ab}{c} = xx$  (Wyciąg

(Wycią: pierwiast: kwadr:) . . .  $\sqrt{\frac{ab}{c}} = x$ .

$$\frac{aa}{xx} = aa : \frac{ab}{c} = aa \times \frac{c}{ab} = \frac{ac}{b}.$$

Więc  $\frac{a}{x} = \sqrt{\frac{ac}{b}}.$

$$\frac{bb}{xx} = bb : \frac{ab}{c} = bb \times \frac{c}{ab} = \frac{bc}{a}.$$

Więc  $\frac{b}{x} = \sqrt{\frac{bc}{a}}.$

Rozwiązanie. Liczby szukane  $\sqrt{\frac{ab}{c}}, \sqrt{\frac{ac}{b}}, \sqrt{\frac{bc}{a}}.$

albo  $\sqrt{\frac{abc}{cc}}, \sqrt{\frac{abc}{bb}}, \sqrt{\frac{abc}{aa}}.$

albo  $\frac{\sqrt{abc}}{c}, \frac{\sqrt{abc}}{b}, \frac{\sqrt{abc}}{a}.$

To jest, chcąc znaleźć każdą ze trzech ilości, trzeba zrobić Wieloczyn ze trzech Wieloczynów danych, wyciągnąć z niego pierwiastek kwadratowy, a Wieloraz tego pierwiastku przez Wieloczyn dany dwóch ilości, okaże ważność ilości trzeciéj, która w tén Wieloczyn niewchodzi.

Przykład.  $a = 18.$   $\frac{ab}{c} = \frac{18 \cdot 24}{48}.$   $\sqrt{\frac{ab}{c}} = 3.$

$b = 24.$

$c = 48.$   $\frac{ac}{b} = \frac{18 \cdot 48}{24}.$   $\sqrt{\frac{ac}{b}} = 6.$

$\frac{bc}{a} = \frac{24 \cdot 48}{18}.$   $\sqrt{\frac{bc}{a}} = 8.$



154. Zadanie 3. Znaleźć trzy takie liczby, aby Wieloczyn z pierwszcy i z summy dwóch pozostałych był . . . . . 18.  
 Z drugiey, i z summy dwóch innych . . . . . 24.  
 Z trzeciéy, i z summy dwóch innych . . . . . 30.

*Arytmetycznie.* Wieloczyny dané tak piérwszy iak i drugi, zawierają w sobie Wieloczyn dwóch piérwszych liczb szukanych.

Wieloczyny dané piérwszy i trzeci zawierają w sobie podobnie Wieloczyn piérwszcy i trzeciéy liczby szukanej.

Wieloczyny dané drugi i trzeci zawierają także w sobie Wieloczyn drugiey i trzeciéy liczby szukanej.

Więc summa trzech Wieloczynów danych, zawiera w sobie dwa razy summę trzech Wieloczynów ze trzech liczb szukanych branych po dwie. A że ta summa trzech Wieloczynów danych jest 72, a połowa iéy 36; więc summa piédynczà Wieloczynów liczb szukanych po dwie branych.

$$\left. \begin{array}{l} \text{to jest 1wszcy i 2giéy.} \\ \text{1wszcy i 3ciéy.} \\ \text{2giéy i 3ciéy.} \end{array} \right\} \text{ jest 36.}$$

Że zaś summa Wieloczynów trzeciéy liczby przez piérwszą i drugą jest 30.

Więc Wieloczyn piérwszcy przez drugą będzie różnicą między 36, i 30, to jest 6.

Summa także Wieloczynów 2giéy liczby przez 1wszą i 3cią jest 24.

Więc Wieloczyn piérwszcy i 3ciéy będzie różnicą między 36, i 24, to jest 12.

Naostatek summa Wieloczynów 1wszcy liczby przez 2gą i 3cią jest 18.

Więc Wieloczyn 2giéy i 3ciéy będzie różnicą między 36, i 18, to jest 18.

Całe więc to Zagadnienie przywiedzione jest tym sposobém do poprzedzającego, aby znaleźć trzy liczby, których po dwie branych wiadomém są Wieloczyny.

Té trzy liczby będą 2, 3, 6; co łatwo sprawdzić można.

*Algebraicznie. Mianowanie.* Liczby trzy szukane  $x, y, z$ .

$$\text{Warunek. } \begin{cases} x(y+z) = 18. \\ y(x+z) = 24. \\ z(x+y) = 30. \end{cases}$$

$$\text{Przerób: } \begin{cases} xy + xz = 18. \\ xy + yz = 24. \\ xz + yz = 30. \end{cases}$$

$$\text{Dodawszy } \dots 2xy + 2xz + 2yz = 72.$$

$$\text{Podz. przez 2 } \quad xy + xz + yz = 36.$$

Odiawszy następnie każde ze trzech równań Przerabiania.

$$xy \dots \dots \dots = 6.$$

$$xz \dots \dots \dots = 12.$$

$$yz = 18.$$

Ze dwóch pierwszych równań

$$\text{ponieważ } \dots \dots \dots 2xy = 12.$$

$$xz = 12.$$

$$\text{Wypada } \dots \dots \dots 2xy = xz.$$

$$\text{a zatem } \dots \dots \dots 2y = z.$$

$$\text{więc } \dots \dots \dots 2yy = yz.$$

$$\text{A że } \dots \dots \dots yz = 18.$$

$$\text{więc } \dots \dots \dots 2yy = 18.$$

$$yy = 9.$$

$$y = 3.$$

$$z = 2y = 6.$$

$$x = \frac{6}{y} = \frac{6}{3} = 2. \text{ tak iak wyżej.}$$

Inszé przykłady. Znaleźć trzy takie liczby, aby Wieloczyn z wśszéy i z summy dwóch pozostałych był  $\dots \dots \dots 80.$

$$\dots \dots \dots \text{z 2giéy } \dots \dots \dots 98.$$

$$\dots \dots \dots \text{z 3ciéy } \dots \dots \dots 108.$$

Niechby znowu trzy Wieloczyny dane były:

$$372.$$

$$420.$$

$$432.$$

Ogólnie. Trzy Wieloczyny dant, są p, q, r.

Bb

xy

$$\text{Warunek. } \begin{cases} xy + xz = p. \\ xy + yz = q. \\ xz + yz = r. \end{cases}$$

$$\text{Więc } \begin{aligned} 2xy + 2xz + 2yz &= p + q + r. \\ xy + xz + yz &= \frac{p + q + r}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{A że } 1. \dots xz + yz = r.$$

$$\text{Więc } \dots xy = \frac{p + q + r}{2} - r = \frac{p + q - r}{2}.$$

$$2. \quad xy + yz = q.$$

$$\text{Więc } \dots xz = \frac{p + q + r}{2} - q = \frac{p - q + r}{2}.$$

$$3. \quad xy + xz = p.$$

$$\text{Więc } \dots yz = \frac{p + q + r}{2} - p = \frac{-p + q + r}{2}.$$

Więc, (podług Zagadnienia poprzedzającego) położywszy zamiast  
 $a$ ; ilość  $\frac{p + q - r}{2}$ ; zamiast  $b$ ,  $\frac{p - q + r}{2}$ ; zamiast  $c$ ,  $\frac{-p + q + r}{2}$

$$\text{będzie } xx = \frac{(p + q - r)(p - q + r)(-p + q + r)}{2(-p + q + r)^2}.$$

$$x = \frac{\sqrt{(p + q - r)(p - q + r)(-p + q + r)}}{2(-p + q + r)}.$$

$$yy = \frac{2(-p + q + r)}{(p + q - r)(p - q + r)(-p + q + r)}.$$

$$y = \frac{\sqrt{(p + q - r)(p - q + r)(-p + q + r)}}{2(p - q + r)}.$$

$$xz = \frac{2(p - q + r)}{(p + q - r)(p - q + r)(-p + q + r)}.$$

$$z = \frac{\sqrt{(p + q - r)(p - q + r)(-p + q + r)}}{2(p + q - r)}.$$



$$z = \frac{\sqrt{(2(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r))}}{2(p+q-r)}$$

*Przykład.* Niechby było  $p = 18$ .

$$q = 24.$$

$$r = 30.$$

$$\text{Będzie } xx = \frac{12 \times 24 \times 36}{2 \times 36^2} = \frac{12 \times 24}{2 \times 36} = 4.$$

$$x = 2.$$

$$yy = \frac{12 \times 24 \times 36}{2 \times 24^2} = \frac{12 \times 36}{2 \times 24} = 9.$$

$$y = 3.$$

$$zz = \frac{12 \times 24 \times 36}{2 \times 12^2} = \frac{24 \times 36}{2 \times 12} = 36.$$

$$z = 6.$$

155. *Uwaga.* Gdyby nam przyszło szukać trzech liczb, wiadome mając Wieloczynny każdej z nich, przez różnicę dwóch pozostałych; tedy zagadnienie na pozór wyznaczone byłoby niewyznaczonem w samej rzeczy.

Jakoż niech będą trzy równania

$$x(y-z) = p.$$

$$y(x-z) = q.$$

$$z(x-y) = r.$$

$$\text{to jest } xy - xz = p.$$

$$xy - yz = q.$$

$$xz - yz = r.$$

Odiawszy rwsze równanie od 2giego,

$$\text{będzie } xz - yz = q - p.$$

A że rwsza strona tego równania jest ta sama, co i pierwsza strona 3go równania; więc i drugie strony tychże równań powinny być równe: a zatem, jeżeli  $r = q - p$ , tedy 3cie równanie dane jest zbytecznem, ponieważ już się zamykało we dwóch rwszych równaniach. Jeżeli zaś nie jest  $r = q - p$ ; tedy 3cie równanie sprzeciwia się dwóm pierwszym, i zagadnienie staie się nie podobnem.

156. Zadanie 4. Znaleźć dwie liczby, z których jedna byłaby dwa razy tak wielką jak druga, a summa ich kwadratów 45.

*Arymetycznie.* Większą z tych liczb jest podwójną mniejszej, więc i jej kwadrat jest poczwórny kwadratu mniejszej, a summa tych dwóch kwadratów, zamknięta w sobie 5 razy kwadrat téżże mniejszej liczby. Więc kwadrat mniejszej liczby 5 razy wzięty czyni 45, a zatem pojedynczo wzięty będzie  $\frac{1}{5}$  liczby 45, to jest 9. Liczba tedy mniejsza jest 3, a większa 6.

Mniejsza liczba	3.	Kwadrat iéy	9.
Większa	6.	Kwadrat iéy	36.
		Summa	45.

<i>Algebr. Mian:</i>	Mniejsza liczba	$x.$
	Większa	$2x.$
	Kwadrat mniejszej	$xx.$
	Kwadrat większej	$4xx.$
	Summa kwadr:	$5xx.$

*Warunek.*  $5xx = 45.$

*Przerób:* (Pódzieli: obie strony przez 5)  $xx = 9.$   
(Wyciągn: pierwiast: kwadr:)  $x = 3$  tak jak wyżej.

*Inszé przykłady.* Znaleźć dwie liczby z których jedna byłaby potrojną drugiey, a summa ich kwadratów 250.

I znowu znaleźć dwie liczby, z których jedna byłaby  $\frac{2}{3}$  drugiey, a summa ich kwadratów 325.

*Ogólnie.* Znaleźć dwie liczby któreby były do siebie w stosunku  $m$ , do  $n$ : summa zaś ich kwadratów byłaby ilość daną  $q$ .

<i>Mian:</i>	Liczby szukane	$mx.$	Kwadraty	$mmxx.$
		$nx.$		$nnxx.$
			Summa	$xx(mm+nn.)$

*Warunek.*  $xx(mm+nn)=q.$

*Przerób:*

*Przerabianie.* (Podzieliwszy obie strony przez  $mm + nn$ )

$$xx = \frac{q}{mm + nn}.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$x = \sqrt{\frac{q}{mm + nn}}$$

*Rozwiązanie.*  $mx = m \sqrt{\frac{q}{mm + nn}}$

$$nx = n \sqrt{\frac{q}{mm + nn}}$$

*Sprawdzenie.*  $mmxx = mm \left( \frac{q}{mm + nn} \right)$

$$nnxx = nn \left( \frac{q}{mm + nn} \right)$$

$$xx(mm + nn) = (mm + nn) \left( \frac{q}{mm + nn} \right) = q.$$

*Przykład.* Niech będzie  $m = 1.$

$$n = 3.$$

$$q = 250.$$

$$xx = \frac{q}{mm + nn} = \frac{250}{10} = 25.$$

$$x \text{ albo } mx = 5.$$

$$xx = 25$$

$$3x \text{ albo } nx = 15.$$

$$9xx = 225.$$

$$10xx = 250.$$

*Uwaga.* Zagadnienie następujące: Znaleźć trzy takie liczby, aby Wieloczynny każdej z nich, przez jedną i drugą z pozostałych były wiadome, i aby summa kwadratów z tych dwóch liczb ostatnich była także wiadoma: to, mówię, Zagadnienie wychodzi na poprzedzające.



157. Zadanie 5. Znaleźć trzy liczby których wiadome są trzy Wielorazy, wypadające z Wieloczynów liczb tych po dwie branych, a przez zcią pozostałą podzielonych.

Niech będą trzy Wielorazy dané  $a, b, c$ .

Mianowanie. Liczby szukane  $x, y, z$ .

$$\text{Warunek. } \begin{cases} \frac{xy}{x} = a. \\ \frac{xz}{y} = b. \\ \frac{yz}{z} = c. \end{cases}$$

$$\text{Przerób: } \frac{xy}{x} : \frac{xz}{y} = \frac{y}{z} : \frac{z}{y} = yy : zz.$$

$$\text{że jest } \dots \frac{xy}{x} : \frac{xz}{y} = a : b.$$

$$\text{więc } \dots yy : zz = a : b.$$

$$\text{a zatem } \dots y : z = aa : ab = a : \sqrt{ab}.$$

$$\text{że zaś } \dots \frac{xy}{z} = a.$$

$$\text{więc } \dots y : z = a : x. \text{ A zatem } x = \sqrt{ab}.$$

$$\text{Podobnie będzie } \dots y = \sqrt{ac}.$$

$$\text{Rozwiązanie } x = \sqrt{ab}; y = \sqrt{ac}; z = \sqrt{bc}.$$

$$\text{Przykład. Niech będzie } a = 4.$$

$$b = 9.$$

$$c = 36.$$

$$\text{albo } a = 8.$$

$$b = 18.$$

$$c = 32.$$

158. Zadanie 6. Znaleźć dwie liczby, z których jedna byłaby dwa razy tak wielką jak druga, a różnica ich kwadratów 48.

*Arytmetycznie.* Większą z tych liczb jest podwójną mniejszą, więc i jej kwadrat jest poczwórny kwadratu mniejszej, a różnica tych kwadratów będzie potrójną kwadratu téższej liczby mniejszej. Więc kwadrat liczby mniejszej trzy razy wzięty czyni 48, a zatem pojedynczo wzięty będzie  $\frac{1}{3}$  liczby 48, to jest 16. Liczba tedy mniejsza jest 4, a większa 8: to jest pierwiastek kwadratowy summy 48, i 16, czyli 64.

Mniejszy liczba . . . . .	4.	Kwadrat iey . . . . .	16.
Większa . . . . .	8.	Kwadrat . . . . .	64.

Różnica . . . . . 48.

<i>Algebr. Mian:</i>	Mniejszy liczba . . . . .	$x$ .
	Większa . . . . .	$2x$ .
	Kwadrat mniejszy . . . . .	$xx$ .
	. . . . . większy . . . . .	$4xx$ .

Różnica kwadratów  $3xx$ .

*Warunek.*  $3xx = 48$ .

*Przerób:* (Podzieliwszy obie strony przez 3)  $1xx = 16$ .  
(Wyciąg pierwiastk kwadr.) . . . . .  $1x = 4$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 4$ . Tak jak wyżej.

*Inszé przykłady.* Znaleźć dwie liczby, z których jedna byłaby potrójną drugiey, a różnica ich kwadratów 200.

I znów znaleźć dwie liczby, z których jedna byłaby  $\frac{2}{3}$  drugiey, a różnica ich kwadratów 80.

*Ogólnie.* Znaleźć dwie liczby, z których większą miałaby do mniejszej stosunek  $m$ , do  $n$ , a różnica ich kwadratów równałaby się liczbie daney  $q$ .

<i>Mianowanie.</i>	Liczby szukané . . . . .	$mx, nx$ .
	Ich kwadraty . . . . .	$m^2xx, n^2xx$ .
	Różnica tych kwadratów . . . . .	$m^2xx - n^2xx$ .
	albo . . . . .	$xx(m^2 - n^2)$ .

Wa-

*Wzrostek.*  $xx(mm - nn) = q.$

*Przerabianie.* (Podzieliwszy obie strony przez  $mm - nn$ )

$$xx = \frac{q}{mm - nn}.$$

(Wyciągn: pierwiastek kwadratu)

$$x = \sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)}.$$

*Rozwiąz:*  $mx = m \sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)}; mnx = mn \sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)}$

$$nx = n \sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)}; nmx = mn \sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)}$$

*Sprawdzenie.*  $mnx - nmx = \frac{q}{mm - nn} (mm - nn) = q.$

*Przykład.* Niech będzie  $m = 3.$

$$n = 2.$$

$$q = 80.$$

$$\frac{q}{mm - nn} = \frac{80}{9 - 4} = \frac{80}{5} = 16.$$

$$\sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)} = 4$$

Liczby szukane  $mx = 12.$  Kwadraty  $144.$

$nx = 8.$   $64.$

Różnica kwadratów  $80.$

159. *Uwagi.* Do poprzedzającego Zadania łatwo można przywieść następujące: Znaleźć trzy liczby, z których jedną wiemy wieloczynny przez dwie pozostale brane z osobna, i wiemy także różnicę kwadratów, tych dwóch liczb ostatnich

Uważając czwarte i szóste poprzedzające zadania Jeometrycznie; wychodzą one na jedno, iak gdyby przyszło wyznaczyć Trójkąt prostokątny, którego



którego wiemy przeciw prostokątą, i stosunek dwóch Ramióń kąta prostego, (co służy do 4tego Zadania,) albo którego wiadome nam jest jedno ramię kąta prostego, i stosunek dwóch innych boków, (co służy do 6tego Zadania.) Rozwiązanie Jeometryczne tych dwóch Zadań, jest bardzo łatwe.

W poprzedzających Zadaniach niewiadomym był tylko wyraz zawierający kwadrat ilości niewiadomej, a zatem oswobodziwszy go (przez sposoby w Rozdziale I. wyłożone) z działań któremi był powikłany, przychodziliśmy do kwadratu niewiadomego, równego kwadratowi wiadomemu, a naostatek doszliśmy i do samej ilości niewiadomej, równającej się pierwiastkowi kwadratowemu ilości wiadomej. Działania, które nam czynić trzeba było do rozwiązania tych Zadań prostych, różniły się tylko od działań, które nas wyżej zatrudniały, wyciąganiem pierwiastku kwadratowego z liczb wiadomych.

Ale gdy się trafi, że Równanie, które rozwiązać przypada, zawiera w sobie dwa wyrazy z niewiadomą ilością, a w jednym z tych wyrazów jest ilość niewiadoma, rozmnożoną przez siebie samą, w drugim zaś jest ta sama ilość rozmnożoną przez ilość wiadomą; w takim razie trzeba uczynić poprzednicze działania, przez które jedna strona Równania zawierająca wyrazy niewiadome, stałaby się kwadratem: I to czyni powtórna różnicę w rozwiązaniu Zagadnień pierwszego stopnia, od rozwiązania Zagadnień drugiego stopnia.

160. Zadanie 7. Znaleźć dwie liczby, których różnica jest 2, a Wieloczyn 35.

*Arytmetycznie.* Z przykładów §. 116 i następujących łatwo wnieść można, że Wieloczyn ze dwóch ilości, równa się różnicy, kwadratów z połowy ich summy i z połowy różnicy: albo co na jedno wychodzi, że kwadrat z połowy summy dwóch ilości, równa się summie z ich Wieloczynu, i z kwadratu połowy ich różnicy. W przypadku teraźniejszym połowa różnicy danej jest 1, Wieloczyn dany jest 35, summa tych dwóch ilości, a zatem kwadrat połowy summy jest 36: przeto sama połowa summy będzie 6.

Więc Zagadnienie uczynione wypada na to, aby znaleźć dwie ilości, których połowa summy jest 6, a połowa różnicy 1. Będzie tedy większa ilość 7, a mniejsza 5: ich Wieloczyn 35, a Różnica 2.

*Algebr.* Mian: Mniejsza ilość . . . . .  $x$ .

Większa . . . . .  $x + 2$ .

Wieloczyn . . . . .  $xx + 2x$ .

Ca

Warunek

*Warunek.*  $xx + 2x = 35.$

Gdy ilość składa się ze dwóch części, wtedy kwadrat ięý składać się będzie ze trzech części; toieft, z kwadratu piérwizéý części, z podwóýnego Wieloczynu piérwizéý części przez drugą, i z kwadratu drugiéý części (116.) Wystawiając sobie  $x$ , iako część ilości złożonéý ze dwóch wyrazów, z których kwadrat czynić przypada,  $xx$  będzie kwadratem téý części,  $2x$  będzie podwóýnym Wielocznym téý części przez część drugą, a zatém  $1x$  będzie pojedynczym Wielocznym piérwizéý części  $x$  przez drugą: więc ta druga część będzie 1, któręý kwadratem iest także 1. Dodawszy tedy 1, do piérwizéý strony równania podanego, będzie  $xx + 2x + 1$ , toieft kwadrat z  $x + 1$ . Dla zachowania równości d-dawszy także 1, i do drugiéý strony, będzie Równanie  $xx + 2x + 1 = 36$ , albo  $(x + 1)^2 = 36$ . Wyciągnawszy piérwioflek kwadratowy po obu stronach, będzie  $x + 1 = 6$ . Odiawszy 1, od obu stron . . . .  $x = 5$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 5$ . Maieysz li czba.  
 $x + 2 = 7$ . Większą li czba.  
 $xx + 2x = 35$ . Wieloczyn równy danému.

*Uwaga.* Przybyło tu nowé działanie w Przerabianiu téý strony Równania, która zamykała w sobie wyrazy niewiadomę. To przerabianie wykonaliśmy, przywiódłszy do kwadratu tę stronę przez wzięcie połowy Spółczynnika w drugim wyrazie  $2x$ , toieft, przez wzięcie 1, i przez dodanie do każdéý strony Równania, kwadratu téý połowy, toieft 1.

*Inszé przykłady.* Niech będzie różnica daná 6, a Wieloczyn 55.

Przydziemy do Równania . . .  $xx + 6x = 55$ .

Spółczynnikiem drugiéý wyrazu iest 6, połowa iego 3, a kwadrat téý połowy 9. Dodawszy tén kwadrat do obu stron, będzie  $xx + 6x + 9 = 64$ .

albo . . . .  $(x + 3)^2 = 64$

Wyciągn: piérwi: kwadr:  $x + 3 = 8$ .

a, famo . . . .  $x = 5$ .

Niech znouu będzie Różnica daná 8, a Wieloczyn 105.

W równaniu  $xx + 8x = 105$ , połowa Spółczynnika wyrazu drugiéý, iest 4: dodawszy do obu stron kwadrat téý połowy, toieft 16; będzie

$xx + 8x + 16 = 121$ .

albo . . .  $(x + 4)^2 = 121$ .

Wycią-

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy po obu stronach

$$x + 4 = 11.$$

$$x \equiv 7.$$

Ogólnie. Niech będzie Różnica daná:  $2d$ , a Wieloczyn dany p.

*Mianowanie.* Mnicyśzą ilość . . . . . x.

Większa ilość . . . . .  $x + 2d$ .

Wieloczyn  $\dots \dots \dots x x + 2 dx.$

Warunek.  $xx + 2dx = p.$

*Przerób:* Połowa Spółczynnika ilości niewiadoméy w drugim wyrazie jest  $d$ , kwadrat téy połowy  $dd$ . Dodawliży ten kwadrat do obu stron, -bg.

$$xx + 2dx + dd = p + dd.$$

$$\text{alio} \quad (x+d)^2 = p + dd.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadrato-

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy

wy po obu stronach . . . . .	$x + d = \sqrt{p + dd}.$
. . . . .	$\quad\quad - \sqrt{p + dd}.$

$$x + d = \sqrt{p + dd}.$$

Obu stronach . . . . .	$x + a = \sqrt{(p + a)}$
Odlawczy $d$ , od obu stron . . . . .	$x = \sqrt{(p + dd)} - d$

Rozwiązanie.  $x = \sqrt{(p + dd)} - d$ . Mniejsza ilość.  
Większa ilość.

$$x + 2d = \sqrt{(p + dd)} + d. \quad \text{Większa ilość.}$$
$$V(p + dd) = d. \quad \text{Množny.}$$
$$V(p + dd) + d \text{ - Množník.}$$

$$\frac{p+dd - d \sqrt{p+dd}}{d \sqrt{p+dd} - dd} \quad \text{Wieloczyn przez } \sqrt{p+dd}. (*)$$

$$d \gamma(p + dd) = dd. \quad \text{Wieloczyn przez } d.$$

$p + dd$        $dd = p$ . Wieloczyn cały równający się Wieloczynowi danému.

Ogólne Formy dopiero wywiedzione można tak wymieniać:

Do dan'ego Wieloczynn  $m$  się dodać kwadrat połowy Różnicy dan'ej, a z t'ej summy  $m$  być wyciągniony pierwiastek kwadratowy. D'pi'ero do tego pierwiastku dodać się lub od niego odejmuie połowa Różnicy dan'ej: i tak nakoniec znajduie się większą ilość w summy, a mnieyszą w reszcie.

Cc 2

Przy-

(\*) Ponieważ pierwiastek kwadratowy jakiej ilości, jest tą ilością, którą przez siebie rozmnożoną, wydać ilość, której jest pierwiastkiem; więc Wielo-



*Przykład.* Niech będzie  $2d = 6$ ;  $d = 3$ .

$$p = 55.$$

$$dd = 9; p + dd = 64.$$

$$\sqrt{p + dd} = 8.$$

$$\sqrt{p + dd} + d = 11.$$

$$\sqrt{p + dd} - d = 5.$$

We wszystkich przykładach poprzedzających umyślnie się dobięrało liczb takich, że można było wyciągnąć Pierwiastek kwadratowy z ilości wiadomych, gdzie tego była potrzeba. Mogą się zaś zdarzyć i takie przykłady, w których pierwiastek kwadratowy wyciągnionym być nie może z ilości wiadomych z których przypada wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, i takie ilości nazywają się *nieśpółmiernymi* (*irrationales albo incommensurabiles.*) Nową stąd pokazuje się Różnica, między Rozwiązaniem Zagadnień pierwszego i drugiego stopnia. Gdy w Zagadnieniach pierwszego stopnia wchodzące tam ilości wiadome, są spółmiernymi, będą spółmiernymi także i niewiadome ilości, odpowiadające na Zagadnienie. W Zagadnieniach zaś drugiego stopnia bardzo się często przytrafia, że chociaż ilości wiadome będą spółmiernymi, wszakże ważność ilości szukanych pokazuje się być nieśpółmierną.

*Przykład.* Niech będzie  $2d = 6$ .

$$p = 9.$$

$$p + dd = 9 + 9 = 18 = 9 \times 2.$$

$$\sqrt{p + dd} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}. \text{ Ilość nieśpółmierna.}$$

Dwie tedy są ilości szukane . . . .  $3\sqrt{2} + 3$ .

$$3\sqrt{2} - 3.$$

*Uwaga.* Wprawiając Uczniów w Rozwiązywanie Równań składowanych, aby nabrali łatwości w takowem rozwiązywaniu, w którym się równań składowanych ustrzedz nie można; trzeba oraz im pokazać, iż częstokroć obrotne sobie posłapiwszy w Mianowaniach, mogą tego dokazać: iż z samemi

---

czyn ilości  $\sqrt{p + dd}$  przez nie samę, to jest kwadrat ilości  $\sqrt{p + dd}$  jest  $p + dd$ .

Tak też  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ , bo niech będzie  $\sqrt{a} = p$ ;  $\sqrt{b} = q$ ; Wtedy  $a = pp$ ;  $b = qq$ ; a zatem  $ab = ppqq = pq \times pq$ ; a stąd  $\sqrt{ab} = pq$ ; że zaś  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = pq$ ; Wtedy  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ .

ni tylko prostémi równaniami, a nie z składaniami mieć będą do czynienia. I tak w poprzedzającym Zadaniu, zamiast coby mieli szukać bezśrzednie obu dwóch ilości żądanych, których daną jest różnica i Wieloczyn; mogą szukać naprzód summy tych dwóch ilości, i oznaczyć większą ilość przez połowę ich summy wraz z połową ich Różnicy, mniejszą zaś przez połowę także ich summy, odjąwszy od niej połowę ich Różnicy.

*Mianowanie.* Niech będzie summa szukaná . . . . .  $2f$ .  
 Różnica . . . . .  $2d$ .  
 Ilości szukané . . . . .  $f + d$  i  $f - d$ .  
 Wieloczyn . . . . .  $ff - dd$ .

*Warunek.*  $ff - dd = p$ .

*Przerabianie.* (Dodawszy  $dd$  po obu stronach)  
 $ff = p + dd$ .  
 (Wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy.)  
 $f = \sqrt{p + dd}$ .

*Rozwiązanie.*  $f + d = \sqrt{p + dd} + d$ . [Wyrażenia dwóch ilości  
 $f - d = \sqrt{p + dd} - d$ . [szukanych takież jak wyżej.

161. Zadanie 8. Znaleźć dwie liczby, których summa 20, a Wieloczyn 91.

*Arytmetycznie.* Ponieważ kwadrat połowy summy dwóch ilości równa się summie z ich Wieloczynu, i z kwadratu połowy ich Różnicy, (116 i następ.) więc w przypadku danym 100 równać się będzie Summie z Wieloczyna 91, i z kwadratu połowy różnicy, liczb szukanych: a zatem kwadrat téż po połowy różnicy równy będzie różnicy między 100, i 91, to jest, równy będzie liczbie 9: więc sama połowa Różnicy liczb szukanych jest 3.

$$\begin{aligned} \text{Liczby szukané} \quad & \begin{cases} 10 + 3 = 13. \\ 10 - 3 = 7. \end{cases} \end{aligned}$$

*Algebraicznie. Pierwszym sposobem.*

*Mianowanie.* Jedna ilość szukaná . . . . .  $x$ .  
 Drugá . . . . .  $20 - x$ .  
 Wieloczyn . . . . .  $20x - xx$ .

*Warunek.*  $20x - xx = 91.$

*Przerabianie.* (Dodawszy  $xx$  po obu stronach)

$$20x = 91 + xx.$$

(Odiawszy  $20x$  po obu stronach)

$$0 = 91 + xx - 20x.$$

$$\text{albo } xx - 20x + 91 = 0.$$

Dopełnimy kwadratu, kładąc kwadrat z 10, to jest, z połowy współczynnika drugiego wyrazu za wyraz trzeci, to zaś uczynimy przydawszy 9, do trzeciego wyrazu 91, i oraz do drugiej strony. Będzie tedy . . .

$$xx - 20x + 100 = 9.$$

$$\text{albo } (x - 10)^2 = 9.$$

(Wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy po obu stronach)

$$x - 10 = 3.$$

(Dodawszy 10 po obu stronach)

$$x = 13.$$

*Rozwiązanie.*  $x = 13.$  Jedna ilość szukaną.

$20 - x = 7.$  Drugą ilość szukaną.

---


$$20x - xx = 91. \quad \text{Wieloczyn.}$$

*Drugim sposobem.*

*Mianowanie.* Różnica szukaną dwóch liczb . . .  $2d.$

Liczby szukané . . .  $10 + d$ , i  $10 - d.$

Ich wieloczyn. . .  $100 - dd.$

*Warunek.*  $100 - dd = 91.$

*Przerabianie.* (Dodawszy  $dd$  po obu stronach)

$$100 = 91 + dd.$$

(Odiawszy 91 po obu stronach)

$$9 = d.$$

(Wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy)

$$3 = d.$$

*Rozwiązanie.*  $10 + d = 13.$   $10 - d = 7.$  { tak iak wyżej.



162.

162. *Uwagi* 1. Ponieważ Wieloczyn dwóch liczb, powinien być powiększonym przez kwadrat połowy ich Różnicy, aby tak powiększony zrównał kwadrat połowy ich summy; przeto ten Wieloczyn będzie zawsze mniejszy, niżeli kwadrat połowy summy dwóch liczb: a zatem aby Zagadnienie rozwiązać można, trzeba aby Wieloczyn dany  $p$ , mniejszym był od  $\frac{1}{4}$ . Tego w samej rzeczy uczą nas i bez rozumowania, same poprzedzające Formy.

Jakoż kwadrat ilości przydaynój lub ujemnój jest zawsze przydaynym (60 i następ.): a zatem jeżeli uważać kiedy musimy ilość ujemną, iak kwadrat; tedy wyobrażenia pierwiastku kwadratu tego wystawić sobie żadną miarą nie będziemy mogli: bo pierwiastkiem tym nie może być, ani ilość przydayną, ani ujemną, a to dla tego, że i w pierwszym, i w drugim razie kwadrat tej ilości, byłby przydaynym, i nie mógłby wydać ilości ujemnój, którą powinna być jego kwadratem.

Pierwiastki tedy kwadratowe ilości ujemnych, podają nowy gatunek ilości, które się nazywają *beziśtotnemi*, (imaginariae,) z przyczyny, iż nie można ich sobie wystawić pod żadną postacią istotnych rzeczy, i że są przeciwnemi ilościami tym, które się nazywają *istotnemi*, (reales.)

*Przykład.* Podzielić liczbę 10, na dwie części, których Wieloczyn byłby 26.

Podług Formy poprzedzającej  $\frac{1}{4} - p = dd$ , znajdziemy

$$dd = 25 - 26 = -1.$$

a zatem  $d = \sqrt{-1}$ . Ilość beziśtotna.

Wyrażenia także ilości szukanych będą beziśtotne

$$5 + \sqrt{-1}.$$

$$5 - \sqrt{-1}.$$

Lubó zaś te dwie ostatnie ilości są beziśtotnemi, czynią jednak zadość dwóm Warunkom podanym, iako to łatwo sprawdzić można w szczególności.

Zgadnienię się tych wyrażeń z dwóma Warunkami Zadania ślad pochodzi, że mając wzgląd na Warunki dane, ilości te dwie beziśtotne, dla znaków przed sobą przeciwnych  $+$ , i  $-$ , niszczą jedna drugą w działaniach, których te Warunki wyciągają. I tak summa tych dwóch ilości  $5 + \sqrt{-1}$ , i  $5 - \sqrt{-1}$ , jest ta sama, co i summa dwóch ilości 5, i 5, albo 10, ponieważ ilość  $\sqrt{-1}$ , raz przydaną do 5, a drugi raz od 5 odjętą, żadnej w powyższej summie odmiany nie sprawia.

Tak

Tak też w Wieloczymie ze dwóch ilości  $5, + \sqrt{-1}$ , i  $5, - \sqrt{-1}$  dwie części  $+5, \sqrt{-1}$ , i  $-5, \sqrt{-1}$  — 1. W podawaniu, które się czynić powinno dla otrzymania całego Wielocznego, nie zostają w nim tylko te dwie ilości  $25, i -(-1)$ , to jest  $25 + 1 = 26$ , gdzie już żadne nie wchodzi ilości bezistotne.

2ga. Tę gatunek ilości, które wypiszą mogą w działania, wynikające z Zadań bez przyzwotego zastrzeżenia się wyłożonych, wprowadzają nową różnicę między Zagadnieniami pierwszego i drugiego stopnia: bo rozwiązanie Zadań pierwszego stopnia, gdzie Warunki nie zawisły iedne od drugich, zawsze są w ilościach istotnych, gdy tylko same Zadania zawierają ilości istotne: w Zagadnieniach zaś drugiego stopnia, choćby Warunki iedne od drugich nie zawisły co do wyznaczenia iednego Warunku przez drugi; często iednak będzie ta między niemi zawisłość, co do granic, które ieden, lub więcej tych Warunków, zakładają innym Warunkom. I tak w przykładzie poprzedzającym gdzie summa daną dwóch liczb, była 10, można było za Wieloczym ich podać iakąkolwiek liczbę od 0, aż do 25, czyli to całkowitą, czyli też ułomkową, a nawet i nieśpółmierną, ale granicą tego Wieloczynu, była liczba 25, nad którą nie mógł być większym.

3cia. Trzeba tu dać poznać Uczniom regułę Jeometrii z Formami Algiebraicznymi. W Jeometrii, aby podzielić linią daną na dwie części, których Prostokąt równałby się kwadratowi innej linii danej; wykreśli się na pierwszej linii, iak na średnicy półkoła, (227 Jeom: Część I.) wyznosi się od któregośkolwiek iey punktu prostopadłą, równą linii drugiej danej, i przez iey wierzchołek ciągnie się równo-odległą od średnicy.

Jeżeli ta równo-odległa spotyka gdzie okrąg pół koła; Zagadnienie będzie podobnem do Rozwiązania: jeżeli zaś ta równo-odległa nigdzie okręgu nie spotyka; Zagadnienie takie jest do Rozwiązania niepodobnem, to jest, drugą linią była daną nad to wielką względem pierwszej, a dokładniej mówiąc daną była większą, niżeli połowa pierwszej linii. Jeometrią więc oznaczają niepodobieństwo Zagadnienia przez nieprzecinanie się tych linii, któreby się przeciąć powinny, gdyby Zagadnienie nie było niepodobnem. Algiebra zaś okazuje to niepodobieństwo, przez wfsunięcie się ilości bezistotnych, czyli pierwiastków kwadratowych z ilości ujemnych.

4ta. Gdyby podobną było wystawić sobie iakikolwiek obraz ilości  $\sqrt{-1}$ ; tedyby podobnie można sobie wyobrazić i każdą inną ilość bezistotną np.  $\sqrt{-2}$ ,  $\sqrt{-3}$ ,  $\sqrt{-4}$  i t. d.

Jakoż  $-2 = 2 \times -1$ . Więc  $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$

Dd

I znów



I znowu  $-3=3 \times -1$ ; Więc  $\sqrt{-3}=\sqrt{3 \times -1}$ .

...  $-4=4 \times -1$ ; Więc  $\sqrt{-4}=\sqrt{4 \times -1}$ .

sta. W tém jeszcze Algiebra i Jeometrya odpowiadają sobie, że w Jeometryczném wykreśleniu np. Zadania poprzedzającego, gdy bok kwadratu, (któremu ma być równy prostokąt dwóch części szukanych, linii daney) mniejszy jest niż połowa téj linii; wtedy równo-odległa ciągniona przez koniec tego boku, przecina we dwóch punktach okrąg półkoła; i prostopadłe spuszczone do średnicy, od dwóch punktów przecięcia, wyznaczają na téjże średnicy czyli linii daney dwa punkta, z których równie jeden iak i drugi, czyni zadosyć Zagadnieniu. W tym razie, odległości tych dwóch punktów od środka koła, i od linii daney do podzielenia są równe, i różnią się tylko odmiennem swoim położeniem. W Algiebrze zaś to dwoiste rozwiązanie, (na które dotąd nie uważaliśmy) czyli dwoiste czynienie zadosyć Zagadnieniu oznaczają się przez dwoistą ważność, którą ma zawsze Pierwiastek kwadratowy iakięś liczby: a ta dwoista ważność nie różni się jedna od drugiey, tylko samym znakiem, który ją poprzedza. Jakoż że tak  $+1$ , iak  $-1$ , ma za kwadrat  $+1$ , więc téż wzajemnie pierwiastek kwadratowy ilości  $+1$ , będzie równie  $+1$ , iak i  $-1$ ; A ogólnie mówiąc, pierwiastek kwadratowy ilości  $aa$ , jest  $+a$ , albo  $-a$ .

I tak w przykładzie poprzedzającym, przyszedłszy do Równania  $dd = ff - p$ , można z niego wyprowadzić dwoistą ważność ilości  $d$ : i będzie  $d$ , albo  $= +\sqrt{ff-p}$ , albo  $= -\sqrt{ff-p}$ , i co razem tak się oznaczają  $d = \pm \sqrt{ff-p}$ . A stąd wypadną dwie części szukane  $f \pm \sqrt{ff-p}$ , i  $f \mp \sqrt{ff-p}$ : to jest, gdy jedney będzie ważność  $f + \sqrt{ff-p}$ , będzie ważność drugiey,  $f - \sqrt{ff-p}$ ; a gdy pierwszą wazy  $f - \sqrt{ff-p}$ , drugą wazyć będzie  $f + \sqrt{ff-p}$ , tak dalece, że równie tak pierwszą, iak i drugą z tych ważności może być wzięta za mnieyszą lub za większą: iako się to niżej ożywiście pokáže np. §. 163.

Gdy jest  $p = ff$ , wtedy ilość pierwiastkową niknie, i jedno tylko Rozwiązanie będzie Zadania: bo tak jedna, iak i druga szukana część będzie  $= f$ : co także zgadza się z Jeometryą. W tym albowiem razie, równo-odległa od średnicy koła ciągniona przez wierzch prostopadłey, do téjże średnicy, spotka okrąg w jednym tylko punkcie, i będzie styczna okręgu koła.

Ta dwoistość w Rozwiązaniu przydaie znowu różnicę między Zagadnieniami pierwszego i drugiego stopnia: w Zagadnieniach pierwszych gdy tylko są wyznaczone, jedno jest Rozwiązanie, w drugich zaś są dwa zawsze Rozwiązania.

Trzeba



Wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy  $x - 3 = \pm 3$ .

a zatem  $x = 3 \pm 3 = 6$ . Dwoistą ważność ilości  $x$ , tak jak wyżej.

Może się komu zdawać mniejszą wagi to dwoiste rozwiązanie Zagadnień drugiego stopnia, dla tego, że we wszystkich prostych a nieskładanych Zagadnieniach, którymiśmy się dotąd zatrudniali, dwoiste takie rozwiązania nie różniły się tylko przez znaki  $+$ , i  $-$ , które poprzedzają ilości rozwiązujące Zagadnienie: albo też, że obojętną jest rzeczą wziąć, czy jedną czy drugą znaną ważność ilości niewiadomej. Wszakże jednak obaczmy potem takie przykłady, w których te dwoiste rozwiązania odpowiadają na Zagadnienie wcale odmiennie: obojwiem zaś w Zagadnieniach Jeometrycznych, względem na takie dwoiste rozwiązania mieć potrzeba.

163. Zadanie 9. Znaleźć dwie liczby, których summa jest 12, a summa ich kwadratów 74.

Przez rozumowanie. Widzieliśmy (119), że summa kwadratów ilości dwóch, jest podwójną summy kwadratów połowy summy, i połowy różnicy tychże dwóch ilości. Więc w niniejszym przypadku, połowa liczby 74, to jest 37, równać się będzie summie kwadratów, połowy summy i połowy różnicy dwóch liczb szukanych. A że ta połowa summy danej jest 6, a kwadrat tej połowy 36, różnica zaś 36, od 37, jest 1; więc kwadrat połowy różnicy będzie 1, a zatem i połowa różnicy jest też 1.

Liczby szukane  $6 + 1$ , i  $6 - 1$ ; to jest 7, i 5.

Algebra: Mian: Nazwiemy jedną liczbę . . .  $x$ .  
Będzie druga . . .  $12 - x$ .  
Kwadrat pierwszemy . . .  $xx$ .  
. . . . . 2giemy  $144 - 24x + xx$ .

Summa kwad:  $144 - 24x + 2xx$ .

Warunek.  $2xx - 24x + 144 = 74$

Przerabianie. (Wziąwszy połowę obudwóch stron)

$$xx - 12x + 72 = 37.$$

(Odiąwszy 37, od obu stron)

$$xx - 12x + 35 = 0.$$

(Dodawszy 1, do obu stron, dla uczynienia pierwszemy, zupełnym kwadratem)  $xx - 12x + 36 = 1$ .

(Wy.



(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$x - 6 = \pm 1.$$

Rozwiązanie.  $x = 7$ , albo  $= 5$ .  $12 - x = 5$ , albo  $7$ .

Liczby szukane i tu na przemian są 5, i są 7: ich kwadraty 25, i 49: Summa tych kwadratów 74.

Drugi sposób. Mianowanie. Różnica szukana dwóch liczb . . .  $2d$ .  
 Liczby szukane . . .  $6 + d$ .  
 . . .  $6 - d$ .  
 Kwadraty ich  $36 + 12d + dd$ .  
 $36 - 12d + dd$ .  
 Summa kwadr.  $72 + 2dd$ .

Warunek.  $72 + 2dd = 74$ .

Przerabianie. (Odejmąwszy 72 po obu stronach)

$$2dd = 2.$$

$$dd = 1.$$

$$d = \pm 1.$$

Rozwiązanie.  $6 + d = 7$ ;  $6 - d = 5$ ; tak iak wyżej.

Insze przykłady. Summa dwóch liczb . . . 18.  
 Summa ich kwadratów . . . 170.  
 Summa dwóch liczb . . . 36.  
 Summa ich kwadratów . . . 698.

Ogólnie. Summa daná dwóch liczb . . .  $2f$ .  
 Summa daná ich kwadratów . . .  $2q$ .

Mianowanie. Różnica szukana . . .  $2d$ .  
 Liczby szukane . . .  $f + d$ .  
 . . .  $f - d$ .  
 Kwadraty ich . . .  $ff + 2df + dd$ .  
 . . .  $ff - 2df + dd$ .  
 Summa kwadratów . . .  $2ff + 2dd$ .

Warunek.  $2ff + 2dd = 2q$ .

*Przeróbianie.*  $\mathcal{f} + dd = q.$

(Oduwśmy  $\mathcal{f}$  po obu stronach)

$$dd = q - \mathcal{f}.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$d = \pm \sqrt{q - \mathcal{f}}.$$

*Rozwiązanie.*  $f + d = f \pm \sqrt{q - \mathcal{f}}.$

$$f - d = f \mp \sqrt{q - \mathcal{f}}.$$

*Sprawdzenie.*  $\mathcal{f} + 2df + dd = q \pm 2f\sqrt{q - \mathcal{f}}.$

$$\mathcal{f} - 2df + dd = q \mp 2f\sqrt{q - \mathcal{f}}.$$

$$2\mathcal{f} + 2dd = 2q.$$

164. *Uwagi.* *uwaga.* To wyrażenie  $\sqrt{q - \mathcal{f}}$  oznacza ilość ujemną, wtedy tylko, gdy  $q - \mathcal{f}$ , jest ilością przydatną: a zatem gdy  $q$ , nie jest mniejsze od  $\mathcal{f}$ . Gdy  $\mathcal{f} = q$ , wtedy  $q - \mathcal{f} = 0$ , a zatem  $\sqrt{q - \mathcal{f}} = \sqrt{0} = 0$ . Gdy na koniec  $\mathcal{f}$ , jest większe niż  $q$ , wtedy  $q - \mathcal{f}$ , będzie ilością ujemną, a  $\sqrt{q - \mathcal{f}}$ , będzie ilością bezistotną. Stąd wynika, iż najmniejszą wartość summy danej dwóch kwadratów taką tylko być może, aby była połową różnicy kwadratów połowy summy danej dwóch liczb: to jest, summa danych dwóch kwadratów nie powinna być mniejszą, niż połowa kwadratu summy dwóch liczb. W przypadku tej równości dwie liczby których szukamy będą równe: co się zupełnie zgadza z rozumowaniem Arytmetycznym.

2gą. Tymże samym sposobem postąpilibyśmy sobie, gdyby dana była różnica dwóch ilości, i summa ich kwadratów. W takim razie w równaniu powyższem ogólnem,  $2\mathcal{f} + 2dd = 2q$ , ilość  $f$ , byłaby niewiadomą, i równałaby się ilości następującej  $\sqrt{q - dd}$ .

3cią. Gdy jest  $q = dd$ , to jest, gdy  $q$ , ma wartość taką tylko jaką może najmniejszą, wtedy dwie szukane ilości  $f + d$ , i  $-d$ .

165. *Zadanie 10.* Znaleźć dwie liczby, których wiadoma jest summa, i summa summy ich kwadratów i Wielkość.

166. *Zadanie 11.* Znaleźć dwie liczby, których wiadoma jest różnica, i summa summy ich kwadratów, i Wielkość.

167. *Zadanie 12.* Znaleźć dwie liczby, których wiadoma jest summa, i Nadmiar summy ich kwadratów, nad ich Wielkość.

168. *Zadanie 13.* Znaleźć dwie liczby, których wiadoma jest różnica, i nadmiar summy ich kwadratów nad ich Wielkość.

159. *Zadanie 14.* Znaleźć dwie liczby, których wiadomą jest różnica, i summa ich Wieloczynu, i różnicy ich kwadratów.

Po wyłożonych Zagadnieniach poprzedzających, te ostatnie żadney trudności sprawić nie powinny.

170. *Zadanie 15.* Znaleźć dwie liczby, których wiemy Wieloczyn, i summe ich kwadratów.

*Arytmetycznie.* Ponieważ dany jest, tych dwóch liczb Wieloczyn; będzie więc wiadomy tenże Wieloczyn podwojony: a zatem wiedzieć będziemy tak summe, iak i różnicę summy daney kwadratów, i tego podwójnego Wieloczynu. Że zaś ta summa, i ta różnica nie czém inném jest, tylko pierwszą kwadratem summy, a drugą kwadratem różnicy dwóch liczb szukanych; więc też summa i różnica dwóch liczb szukanych daną będzie: a zatem daną jest tak jedna, iak i druga liczba.

*Algebraicznie.* Liczby szukane . . . . .  $x$ , i  $y$ .  
Summa daną kwadratów . . . . .  $q$ .  
Wieloczyn dany . . . . .  $p$ .

*Warunek.* 
$$\begin{cases} xx + yy = q. \\ xy = p. \end{cases}$$

*Przerób:* 
$$\begin{cases} xx + yy = q. \\ 2xy = 2p. \end{cases}$$

(Dodawszy i odjąwszy te dwa równania, będzie)

$$\begin{cases} xx + 2xy + yy = q + 2p. \\ xx - 2xy + yy = q - 2p. \end{cases}$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{(q + 2p)} \\ x - y = \sqrt{(q - 2p)} \end{cases}$$

(Dodawszy, i odjąwszy)

$$\begin{cases} 2x = \sqrt{(q + 2p)} + \sqrt{(q - 2p)} \\ 2y = \sqrt{(q + 2p)} - \sqrt{(q - 2p)} \end{cases}$$

Więc . . . .  $x = \frac{\sqrt{(q + 2p)} + \sqrt{(q - 2p)}}{2}$

$$y = \frac{\sqrt{(q + 2p)} - \sqrt{(q - 2p)}}{2}$$

*Sprawdz:*



$$\text{Sprawdz: } xx = \frac{2q + 2\sqrt{qq - 4pp}}{4}$$

$$yy = \frac{2q - 2\sqrt{qq - 4pp}}{4}$$

$$xx + yy = \frac{2q}{4} = q$$

$$xy = \frac{(q + 2p) - (q - 2p)}{4} = \frac{4p}{4} = p$$

171. Uwaga. Granice náy mniejszėj wážnoścí, którą mieć może ilość  $q$ , są wtedy gdy  $q$ , dwa razy tylé oznaczá ile  $p$ : i w takim razie dwie liczby szukane są równé, i wyrażá się tak iedna iako i drugá przez  $\sqrt{q + 2p}$ .

<sup>2</sup>  
Przykład. Niech będzie 1.  $q = 145$ .

$$p = 72.$$

$$2. q = 346.$$

$$p = 165.$$

$$3. q = 530.$$

$$p = 247 \quad (*).$$

172. Zadanie 16. Znaleźć dwie ilości, z których iednéj ráz wziętėj, a drugiėj dwa razy wziętėj wiemy summę: i wiemy także summę ich kwadratów.

Niech będzie  $f$ , summą iednéj ilości ráz wziętėj, i drugiėj dwa razy wziętėj: niech  $p$ , będzie summą kwadratów ilości dwóch szukanych. Jakież będą té ilości?

Mianowanie. Niech  $x$  oznaczá drugá ilość szukaną, będzie  $f - 2x$  piérwszą ilością.

$$\text{Kwadraty tych ilości są } \left\{ \begin{array}{l} \cdot \cdot \cdot xx. \\ ff - 4fx + 4xx. \end{array} \right.$$

$$\text{Summa tych dwóch kw: } ff - 4fx + 5xx.$$

$$\text{Warunek. } ff - 4fx + 5xx = p.$$

Prze-

(\*) Gdyby Nauczyciel osądził, iż Uczniowie iego nie są ieszcze w stanie rozwiązywania ogólnie tego Zagadnienia, i następujących, które także w ogólnosci po-

*Przerób:* (Podzieliwszy przez 5 obie strony)

$$xx - \frac{4fx}{5} + \frac{1}{5}ff = \frac{1}{5}p.$$

(Dopełniwszy kwadratu)

$$xx - \frac{4}{5}fx + \frac{4}{25}ff = \frac{1}{5}p - \frac{4}{25}ff = \frac{5p - ff}{25}.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$x - \frac{2}{5}f = \pm \frac{\sqrt{(5p - ff)}}{5}.$$

*Rozwiązanie.*  $x = \frac{2f \pm \sqrt{(5p - ff)}}{5}.$

$$f - 2x = f - \frac{4f \pm 2\sqrt{(5p - ff)}}{5} = \frac{f \mp 2\sqrt{(5p - ff)}}{5}$$

*Sprawdz:*  $xx = \frac{4ff \pm 4f\sqrt{(5p - ff)} + (5p - ff)}{25}.$

$$= \frac{3ff + 5p \pm 4f\sqrt{(5p - ff)}}{25}.$$

$$ff - 4fx + 4xx = \frac{ff \mp 4f\sqrt{(5p - ff)} + 4(5p - ff)}{25}.$$

$$= \frac{-3ff + 20p \mp 4f\sqrt{(5p - ff)}}{25}.$$

$$ff - 4fx + 5xx = \frac{25p}{25} = p.$$

*Granice.* Aby  $\sqrt{(5p - ff)}$ , był ilością istotną, trzeba żeby  $5p$ , nie było mniejsze od  $ff$ : to jest, najmniejszą wartość summy daney kwadratów, ilości

dané będą; tedy stosując się do pojętności tychże Uczniów, zadawać im piérwéy może szczególne przykłady, postępując zawsze, od łatwiejszych, do mniéy łatwych, i zawilśszych.

ilości dwóch szukanych jest ta, która się równa  $\frac{1}{2}$  kwadratu summy jedney ilości raz wziętę, i drugę dwa razy wziętę. W takim razie druga ilość będzie dwa razy tak wielką jak pierwszą.

*Przykład.* Niech będzie 15 sumą jedney ilości raz wziętę, i drugę dwa razy wziętę. Niech te dwie ilości będą 3, i 6. Summa ich kwadratów 9, i 36, to jest 45, mniejszą będzie, niż jakakolwiek inna summa kwadratów, która by pochodziła z innego podziału.

I tak niechby pierwszą ilość była 5, druga też byłaby 5: a summa ich kwadratów  $25 + 25 = 50$ , większą niż 45. Niechby była pierwszą 1, a druga 7: summa kwadratów będzie  $1 + 49 = 50$ .

*Ogólnie.* Oznaczmy sumę daną przez  $5a$ .  
 Niech będzie druga ilość  $2a$ .  
 pierwszą  $a$ .  
 Summa ich kwadratów  $5aa$ .  
 Niechby była druga ilość  $2a + z$ .  
 będzie pierwszą  $a + 2z$ .

Kwadrat drugiego  $4aa + 4az + zz$ .

Kwadrat pierwszego  $aa + 4az + 4zz$ .

Summa kwadratów  $5aa + 5zz$  Która to summa przewyższa ilość  $5aa$ , ilością zawsze przydayną  $5zz$ .

173. *Uwaga.* Gdy to Zagadnienie jest do rozwiązania podobnem, to jest, gdy  $p$ , jest większe niż  $\frac{1}{2}ff$ , w takim razie dwoiłe ma rozwiązanie. Podług pierwszego będą dwie ilości

$$\frac{2f + \sqrt{(sp - ff)}}{5}, i \frac{f - 2\sqrt{(sp - ff)}}{5}$$

Podług drugiego będą dwie ilości

$$\frac{2f - \sqrt{(sp - ff)}}{5}, i \frac{f + 2\sqrt{(sp - ff)}}{5}$$

*Przykład.* Niech będzie  $f = 30$ .  
 $p = 185$ .

Podług pierwszego rozwiązania, wypadnie 13, i 4.

Podług drugiego 11, i 8.



$$13^2 = 169.$$

$$11^2 = 121.$$

$$4^2 = 16.$$

$$8^2 = 64.$$

Summa . . . 185.

Summa 185.

Inszé przykłady.  $f = 45$ ;  $f = 60$ ;  $f = 100$ .

$p = 410$ ;  $p = 725$ ;  $p = 2005$ .

174. Aby Zagadnienie to rozwiązać przez rozumowanie, zdaie się, że trzeba do tego zaciągnąć pomocy z Jeometrii.

Niech linią AB, wystawia nam sumnę daną iedną; ilości raz wzię- Fig. 31.  
tę, i drugię dwa razy wziętę. Niech linią AX, wyraża pierwszą z ilości  
szukanych: a niech BX, wyraża drugą ilość dwa razy wziętą. Niech będzie  
AC, prostopadła do AB, i równa iey połowie. Pociągniemy BC, a od X,  
wynieśmy XZ, prostopadłą do AB, aż do iey spotkania się w punkcie Z,  
z linią BC. Poprowadźmy do Z, linią AZ: linią XZ, będzie połową li-  
nii BX, toieft, będzie drugą linią szukaną: kwadrat zaś linii AZ, wystawi nam  
sumnę daną kwadratów. Aby więc znaleźć dwa punkta X, i Z, trzeba od pun-  
ktu A, iak od środka promiennieć równym lini, którey kwadrat równałby  
się summie dwóch kwadratów danych, nakreślić koło, którego okrąg przeci-  
nąłby (iżeli to być może) w punkcie Z, linią BC, i spuścić potem od te-  
go punktu prostopadłą ZX.

Aby Zagadnienie to było do rozwiązania podobném, okrąg koła po-  
winién spotkać linią BC: a zatem náy mnieyszą wartość summy daney dwóch  
kwadratów będzie wtedy, gdy bok kwadratu równego téy summie równa się  
prostopadłey AD, spuszczonęj od punktu A, na linią BC: a spuściwszy DE,  
prostopadłą do AB, linie AE, i DE, będą liniami szukanemi. W tym razie  
 $DE = 2AE$ .

Jakoż . .  $BD : CD = AB^2 : AC^2 = 4 : 1$ .

A że . .  $BD : CD = BE : AE$ .

Więc . .  $BE = 4AE$ .

a . . .  $DE = 2AE$ .

I znowu  $BC^2 : AC^2 = AB^2 : AD^2$ .

albo  $5AC^2 : AC^2 = AB^2 : AD^2$ .

więc  $AD^2 = \frac{1}{5}AB^2 = \frac{1}{5}169$ .

Gdy linią AZ, większą iest niż AD, wtedy koło przecina linią BC,  
we dwóch punktach równie-odległych od punktu D.

Niechby np. było  $AZ^2 = p$ .

$$\text{będzie } DZ^2 = p - \frac{5}{2}f = \frac{5p - f}{5}$$

$$\Delta \text{ że jest } DZ^2 : EX^2 = BC^2 : AB^2 = 5 : 4.$$

$$\text{Więc } EX^2 = \frac{4}{5} DZ^2 = \frac{4}{5} (5p - f).$$

$$\Delta \text{ zatem } EX = \frac{2\sqrt{5p - f}}{5}.$$

$$AX = AE + EX = \frac{f + 2\sqrt{5p - f}}{5}$$

$$BX = BE - EX = \frac{4f - 2\sqrt{5p - f}}{5}.$$

$$EX' = \frac{2\sqrt{5p - f}}{5}.$$

$$AX' = AE - EX = \frac{f - 2\sqrt{5p - f}}{5}.$$

$$BX' = BE + EX' = \frac{4f + 2\sqrt{5p - f}}{5}.$$

$$ZX = \frac{2f - \sqrt{5p - f}}{5}.$$

$$Z'X' = \frac{2f + \sqrt{5p - f}}{5}.$$

Wszystko to zgadza się z postępowaniem Algebricznem, wyżej użytym.

175. *Uwaga.* Kiedykolwiek linią  $AZ$ , nie jest większą od  $AB$ , wtedy jeden z punktów przecięcia  $Z$ , jest między punktami  $B$ , i  $C$ : a zatem jeden z punktów przecięcia  $X$ , jest między punktami  $A$ , i  $B$ . W takim więc razie jedno przynajmniej rozwiązanie jest przydatnem.

Gdy nie tylko linią  $AZ$ , nie jest większą od  $AB$ , ale nawet ani od  $AC$ , wtedy obadwa rozwiązania będą przydatnemi.

Gdy linią  $AZ$ , nie jest większą od  $AB$ , jest jednak większą od  $AC$ ; wtedy jedno rozwiązanie będzie przydatnem: w drugim zaś rozwiązaniu będzie

dzie ważność linii AX, ujemną: i gdybyśmy w tym razie uważać chcieli AX, iak ilość przydayną, tedy AB, byłaby nie summą, ale nadmiarém iednëy ilości dwa razy wziętëy, nad drugą raz wziętą.

Nakoniec jeżeli linią AZ, większą jest od AB, w takim razie obadwa punkta Z, Z', leżą nie na łamëy linii BC, ale na iëy przedłużeniu: a zatem też i punkta X, X', znajdować się będą na przedłużeniu linii AB, i tak iedno, iak i drugie rozwiązanie zawiera w sobie ilości ujemné.

W piërwszym rozwiązaniu linią AB, będzie Nadmiarém iednëy ilości raz wziętëy nad drugą, dwa razy wziętą: w drugim rozwiązaniu, linią AB, będzie Nadmiarém drugiey ilości dwa razy wziętëy, nad piërwszą raz wziętą.

Të wnioski wyprowadzonë z wykreślenia Jeometrycznego zgadzają się zupełnie z wnioskami, które wyprowadzić można z Form ogólnych Algebraicznych.

Jakoż aby ilość  $f - 2\sqrt{5p - f}$  byłaby przydayną, trzeba, aby  $f$ , nie było mnieysze od  $2\sqrt{5p - f}$ : toiest  $f$ , nie powinno byđz mnieysze od  $4(5p - f)$ : a zatem  $5f$ , nie powinno byđz mnieysze od  $20p$ : albo ieszcze  $f$ , nie powinno byđz mnieysze od  $4p$ : a nakoniec  $p$ , nie powinno byđz większe od  $\frac{1}{4}f$ , czyli AZ, nie powinna byđz większa od AC.

I znowu aby ilość  $2f - \sqrt{5p - f}$ , była przydayną, trzeba, aby  $2f$ , nie było mnieysze od  $\sqrt{5p - f}$ : toiest  $4f$ , nie powinno byđz mnieysze, niż  $5p - f$ , czyli  $5f$ , nie powinno byđz mnieysze od  $5p$ , albo  $f$ , nie powinno byđz mnieysze od  $p$ , albo nakoniec AZ, nie powinna byđz większa od AB.

*Inszë przykłady.* Znaleźć dwie ilości, których wiadomą iest summa kwadratów, i summa iednëy z nich raz wziętëy, a drugiey trzy, cztery, pięć, sześć, i t. d. razy wziętëy.

76. Zadanië 17. Podzielić 100 dwa razy: każdy zaś raz na dwie liczby tak, aby iedna ze dwóch liczb piërwszego podziału, była dwa razy tak wielką, iak iedna ze dwóch liczb drugiego podziału, dwóch zaś liczb pozostałych Wieloczyn, aby był 1792.

Mianowanië. 1wszą część 2go podziału	. . . . .	$x$ .
1wszą część 1go podziału	. . . . .	$2x$ .
2gą część 2go podziału	. . . . .	$100 - x$ .
2gą część 1go podziału	. . . . .	$100 - 2x$ .

Wieloczyn dwóch drugich części  $10000 - 300x + 2xx$ .

E e 3

Wa-



*Warunek.*  $10000 - 300x + 2xx = 1792.$

*Przeróbianie.* (Podzieliwszy obie strony przez 2, i położywszy naprzód wyrazy niewiadome)

$$xx - 150x + 5000 = 896.$$

(Dla dopełnienia kwadratu, dodawamy 625, do pierwszej strony, i do drugiej)

$$xx - 150x + 5625 = 1521.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratu z obu stron)

$$x - 75 = \pm 39.$$

(Dodawamy 75 do obu stron)

$$x = \frac{114}{36}$$

*Rozwiązanie.*  $x = \frac{36}{114} \cdot 100 = \frac{64}{114}.$

$$2x = \frac{72}{228} \quad 100 - 2x = \frac{28}{128}.$$

*Sprawdzenie.*  $\begin{cases} 64 \times 28 = 1792. \\ -14 \times -128 = 1792. \end{cases}$

*Uwaga.* Gdyby się brały *przydatnie*, (positive), drugiej części dwóch podziałów, tedy w tym razie, już nie summa, ale różnica części szukanych byłaby daną.

*Przez rozumowanie.* To Zadanie może wypaść na jedno co i Zadanie 7, które bardzo łatwo rozwiązało się sposobem Arytmetycznym.

Fig 32.

Jakoż niech linie równe AB, CD, wystawiają nam liczbę 100: a linie AX, BX, CY, DY, niech wystawiają liczby szukane: to jest, niech CY, będzie dwa razy tak wielką jak AX. Gdy tedy weźmiemy linię CE, dwa razy tyle, ile jest AB, będzie też i linia EY, dwa razy tak wielką jak BX: a prostokąt EY  $\times$  DY, będzie dwa razy tak wielki, jak prostokąt DY  $\times$  BX. Ze zaś ten drugi prostokąt waży 1792, więc pierwszy ważyć będzie 3584. A że różnica dwóch linii EY, DY, jest wiadoma, bo nią jest linia DE, która wyraża liczbę 100; więc według Zadania 7, linie EY, i DY, waga, pierwszą 78 + 50, drugą 78 - 50. to jest 128, i 28. BX =  $\frac{1}{2}$  EY = 64: AX = 100 - 64 = 36: CY = 100 - 28 = 72.

Ten sposób postępowania, nie zależy od równości linii AB, i CD, a nawet ani od stosunku linii AX, do CY.

*Ogólnie.* Niech będą dwie liczby dane *a*, *b*: trzeba tak jedną, jak drugą podzielić na dwie części, aby jedna część jednego podziału, była do drugiej

dnę części drugiego podziału, iak  $m$ , do  $x$ : Wieloczyn zaś drugiey części iednego podziału, przez drugą część drugiego podziału, aby był równy ilości daney  $p$ .

*Mianowanie.* Niech będą dwie pierwsze części . . .  $mx$ , i  $nx$ .

Dwie drugie części będą . . .  $a - mx$ , i  $b - nx$ .

Wieloczyn tych dwóch części  $ab - x(an + bm) + mnxx$ .

*Warunek.*  $ab - x(an + bm) + mnxx = p$ .

*Przerób:*  $mnxx - x(an + bm) + ab = p$ .

(Odiąwszy  $ab$ , po obu stronach)

$mnxx - x(an + bm) = p - ab$ .

(Podzieliwszy obie strony przez  $mn$ )

$$xx - \frac{x(an + bm)}{mn} = \frac{p}{mn} - \frac{ab}{mn}$$

(Dodawszy do obu stron kwadrat ilości  $\frac{an + bm}{2mn}$ )

$$\begin{aligned} xx - x \left( \frac{an + bm}{mn} \right) + \frac{aann + 2abmn + bbmm}{4mnmn} &= \frac{p}{mn} + \frac{aann + 2abmn + bbmm}{4mnmn} \\ \frac{aann + 2abmn + bbmm}{4mnmn} - \frac{ab}{mn} &= \frac{p}{mn} + \frac{aann + 2abmn + bbmm}{4mnmn} \\ \frac{4abmn}{4mnmn} - \frac{p}{mn} + \frac{aann - 2abmn + bbmm}{4mnmn} &= \frac{p}{mn} + \left( \frac{an - bm}{2mn} \right)^2 \\ \frac{4mnp + (an - bm)^2}{4mnmn} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - \frac{an + bm}{2mn} &= \pm \frac{\sqrt{4mnp + (an - bm)^2}}{2mn} \\ x &= \frac{an + bm \pm \sqrt{4mnp + (an - bm)^2}}{2mn} \end{aligned}$$

*Rozwiązanie.*  $mx = \frac{an + bm \pm \sqrt{4mnp + (an - bm)^2}}{2n}$

$nx =$

$$nx = \frac{an + bm \pm \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m}$$

$$a - mx = \frac{an - bm \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2n}$$

$$b - nx = \frac{-an + bm \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m}$$

$$\frac{-(an - bm) \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m}$$

$$sb - x(an + bm) + mnxx = \frac{-(an - bm)^2 + (4mnp + (an - bm)^2)}{4mn} =$$

$$\frac{4mnp}{4mn} = p.$$

*Uwaga.* Do tychże samych Form łatwoby przysdż można, poślepując sobie przez samo tylko rozumowanie.

*Przykład.* Niech będzie tak, iak w Zadaniu szczególném

$$\begin{aligned} a &= 100. \\ b &= 100. \\ n &= 1. \\ m &= 2. \\ p &= 1792. \end{aligned}$$

wypadnie ślad,

$$mx = \frac{300 \pm \sqrt{(8 \cdot 1792 + 100^2)}}{2} = \frac{300 \pm 156}{2} = 150 \pm 78 = \frac{228}{2}$$

$$nx = \frac{300 \pm \sqrt{(8 \cdot 1792 + 100^2)}}{4} = \frac{300 \pm 156}{4} = 75 \pm 39 = \frac{114}{2}$$

<i>Insze przykłady.</i>	$a = 100.$	$a = 144.$
	$b = 120.$	$b = 150.$
	$m = 3.$	$m = 5.$
	$n = 2.$	$n = 3.$
	$p = 1824.$	$p = 5847.$



177. Zadanie 18. Podzielić tak 100, iak i 180 na dwie części, aby jedna część drugiej liczby dwa razy była tak wielką, iak jedna część pierwszej liczby, i aby summa kwadratów dwóch części pozostałych czyniła 9760.

Mianowanie. Pierwsza część liczby 100 . . . . .  $x$ .

Druga część . . . . .  $100 - x$ .

Pierwsza część liczby 180 . . . . .  $2x$ .

Druga część . . . . .  $180 - 2x$ .

Kwadraty dwóch drugich części  $\left\{ \begin{array}{l} 10000 - 200x + xx. \\ 32400 - 720x + 4xx. \end{array} \right.$

Summa . . . . .  $42400 - 920x + 5xx.$

Warunek  $5xx - 920x + 42400 = 9760.$

Przerabianie. (Podzieliwszy obie strony przez 5)

$$xx - 184x + 8480 = 1952.$$

Położymy na pierwszej stronie za trzeci wyrząd, kwadrat połowy liczby 184, to jest 92: tym kwadratem będzie 8464: aby zaś mieć ten kwadrat, trzeba odjąć 16 po obu stronach.

$$xx - 184x + 8464 = 1936.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy po obu stronach)

$$x - 92 = \pm 44.$$

(Dodawszy 92 do obu stron)

$$x = 92 \pm 44 = \begin{array}{l} 136 \\ 48 \end{array}$$

Rozwiązanie.  $x = \begin{array}{l} 48. \\ 136. \end{array}$   $2x = \begin{array}{l} 96. \\ 272. \end{array}$

$$100 - x = \begin{array}{l} 52. \\ -36. \end{array} \quad 180 - 2x = \begin{array}{l} 84 \\ -92. \end{array}$$

$$(100 - x)^2 = \begin{array}{l} 2704 \\ 1296. \end{array} \quad (180 - 2x)^2 = \begin{array}{l} 7056 \\ 8464. \end{array}$$

Sprówdzenie.  $2704 + 7056 = 9760.$

$1296 + 8464 = 9760.$

Uwaga. Gdybysmy brali za przydatne, a nie za ujemne, drugie części, drugiego rozwiązania; tedy te odpowiadały innemu Zadaniu, w którym inż nie summa, ale różnica ich od pierwszych części byłaby daną.

178. Zagadnienie to uważane Jeometrycznie i'ogólnie, takby się wy-  
raziło. *Przeciąć dwie linie dané, jedną i drugą na dwie części, tak, aby sto-  
sunek iednój części iednój linii, do iednój części drugiey linii był dany: i aby  
summa kwadratów, dwóch drugich części była także daná.*

Rozwiązanie Jeometryczne tego Zadania ogólnie uważanego służyć  
nam będzie za przykład, iak mąmy sobie postępować, rozwiązując przez ró-  
zuminowanie, iakiéżkolwiek Zadanie, które kilka szczególnych przypadków  
może mieć.

Fig. 33.

Niech będą AB, i CD, dwie linie dané, które tak podzielić trzeba,  
iedną w punkcie X, a drugą w punkcie Y, aby stosunek AX, do CY, był  
równy danému; i aby summa kwadratów z BX, i z DY, była także równá  
danéy.

*Przypadek pierwszy.* Niech linie AB, i CD, będą do siebie, w sto-  
sunku danym AX, do CY: będzie więc i stosunek BX, do DY równy temuż  
stosunkowi: a zatem ten przypadek wychodzi na jedno z Zadaniem 4 tego  
Rozdziału.

*Przykład.* Niech będzie AB = 40. i niech będzie stosunek dany  
CD = 60.  
AX, do CY, równy stosunkowi 2, do 3, w którym także są do siebie linie  
AB, i CD.

Niech będzie 1573, summa daną dwóch kwadratów.

Ponieważ w tym razie, linie BX, DY, mają się także do siebie iak  
2, do 3; będą więc ich kwadraty, iak 4, do 9: a zatem te kwadraty, i ich  
summa, będą się miały do siebie, iak liczby 4, 9, i 13: same zaś kwadra-  
ty będą  $\frac{4}{13}$ , i  $\frac{9}{13}$  względem ich summy: toiest ieden będzie 484, a drugi  
1089: więc linie BX, i DY, odpowiadać będą pierwiątkóm kwadratowym  
liczb 484, i 1089, toiest, liczbóm 22, i 33.

$$\begin{array}{ll} AX = 18. & BX = 22. \\ CY = 27. & DY = 33. \end{array}$$

*Uwaga.* Wyciągając z liczb 484, i 1089, pierwiątki kwadratowe,  
można ie brać przydawaie, lub ujemnie, tak dalece, że linióm BX, i DY,  
odpowiadać będą dwie wážności  $\pm 22$ ,  $\pm 33$ .

Wážności ujemné oznaczają, że punkta X, i Y, są na liniach AB,  
i CD, przedłużonych. W takim razie linie AX, i CY, większe są od linii,  
BX, i DY, liniami AB, i CD, toiest, wážność linii AX, będzie 62, a wá-  
žność linii BX, będzie 93.

*Przypá-*

*Przypadek 2gi.* Niech linią CD, będzie mnieyszą od innéy linii, Fig. 34. której stosunek do AB, byłby równy stosunkowi danému CY, do AX.

Niech CE, będzie tą linią, mającą do AB, stosunek dany CY, do AX. Niech CF, równa AB, będzie prostopadłą do CD: poprowadźmy linią EF. Gdy od punktu Y, wynieśmy YZ, prostopadłą do CD, i przecinającą w punkcie Z, linią EF; stosunek linii EY, do linii YZ, równy będzie stosunkowi linii EC, do CF, czyli EC, do AB, albo CY, do AX, albo nakoniec BX, do EY: a zatem YZ, równa się linii BX: będzie przeto daną summa kwadratów z linii DY, i YZ. Gdy tedy z punktu D, iak od środka, nakreśliśmy koło promieniem równym linii, której kwadrat równałby się summie danéy dwóch kwadratów, to koło linią EF, przetnie w punkcie Z, punkt ten Z, będzie wyznaczonym: a zatem i punkt Y, spuściwszy prostopadłą ZY.

Spuścimy prostopadłą DG, na EF. Z proporcji  $EF:FC=ED:DG$ , wyrachujemy linią DG. Kwadrat iéy oznaczy najmnieyszą wartość summy dwóch kwadratów. Spuścimy znowu prostopadłą GH, na CE, i wyrachujemy linią  $DH = \frac{DG^2}{DE}$ .

Od summy danéy dwóch kwadratów, odejmieśmy kwadrat  $DG^2$  (mnieyszy niż ta summa) zostanie się kwadrat  $GZ^2$ , a przez proporcję  $EF^2:EC^2=GZ^2:HY^2$ ; znajdziemy  $HY^2$ . Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, znajdziemy wartość linii HY, od której odjąwszy DH, zostanie wartość linii DY.

Koło wykreślone z punktu D, iak ze środka promieniem DZ, przetnie linią FG, przedłużoną w punkcie Z', co da wartość linii HY', równéy linii HY: do HY', dodawszy DH, będzie DY', który odpowiada wartość linii BX'. Linie DY', BX', są ujemné względem terażnievtzego Zadania, w którym się kładzie, iż punkta X, i Y, są pierwizy między punktami A, i B, drugi między punktami C, i D. Tęż tamé zaś linie DY', i BZ', rozwiązałyby sposobém przydatnym inżé Zagadnienie, w którym różnica linii AX', BX', byłaby daná, i w którym także daná byłaby różnica linii CY', DY'.

Aby przynajmniey jedno rozwiązanie było przydatném, trzeba do tego, żeby linią DZ nie była więkzszą od linii DF: toieś, żeby summa daná dwóch kwadratów, nie była więkzszą od summy kwadratów linii AB, i CD.



*Przykład.* Niech będzie  $AB = 8100$ .

$$CD = 6400.$$

Niech będzie  $AX$  do  $CY$ , iak 3, do 4

$$\text{a zatem } CE = 10800.$$

$$DE = 4400.$$

$$CE^2 : CF^2 = 16 : 9, \text{ więc } EF^2 : CF^2 = 25 : 9.$$

$$\text{A że } EF^2 : CF^2 = ED^2 : DG^2,$$

$$\text{więc } 25 : 9 = 19\ 360\ 000 : DG^2.$$

$$\text{więc } DG^2 = 6\ 969\ 600.$$

$$DH = \frac{6\ 969\ 600}{4400} = 1584.$$

Niech będzie summa daná kwadratów,

$$\text{to jest } DZ^2 = 30\ 009\ 600.$$

$$\text{więc } GL^2 = 23\ 040\ 000.$$

$$\text{A że } 25 : 16 = GL^2 : HY^2,$$

$$\text{więc } 25 : 16 = 23040000 : HY^2.$$

(Wyciągnąwszy ze wszystkich wyrazów pierwiastek)

$$\text{będzie } 5 : 4 = 4800 : XY.$$

$$\text{albo } 10 : 8 = 4800 : XY.$$

$$\text{a zatem } HY = HY' = 8 \times 480 = 3840.$$

$$DY = 3840 - 1584 = 2256.$$

$$DY' = 3840 + 1584 = 5424.$$

$$CY = CD - DY = 6400 - 2256 = 4144.$$

$$CY' = CD + DY' = 6400 + 5424 = 11824.$$

$$AX = \frac{3}{4} CY = 3108.$$

$$AX' = \frac{3}{4} CY' = 8868.$$

$$BX = AB - AX = 8100 - 3108 = 4992.$$

$$BX' = AX' - AB = 8868 - 8100 = 768.$$

Fig. 35.

*Przypadek 3ci.* Niech będzie linią  $CD$ , większą niż inną linią, której stosunek do  $AB$ , równałby się stosunkowi danému  $CY$ , do  $AX$ .

Niech będzie  $CE$ , tą linią, która do  $AB$ , má stosunek dany  $CY$ , do  $AX$ . Niech będzie  $CF$ , prostopadła do  $CD$ , i równa linii  $AB$ . Poprowadźmy  $EF$ , a od punktu  $D$ , iak od środka promieniem równym linii, której kwadrat równałby się summie daney kwadratów, nakreślmy koło, któreby przecięło w punktach  $Z$ ,  $Z'$ , linią  $EF$ . Niech będą  $ZY$ ,  $Z'Y'$ , prostopadłe do  $CD$ : linie  $CY$ ,  $DY$ , i  $CY'$ ,  $DY'$ , wzięte na linii  $CD$ , zadolyc

uczy-

uczynią zagadnieniu: tym zaś liniom odpowiadać będą, na linii AB, linie AX, (równa linii ZY,) BX: i AX' (równa linii Z'Y') BX'.

Co do rachunku: niech będzie DG, prostopadła do FE: oznaczy ona najmniejszą ważność linii DZ: niech znowu będzie GH, prostopadła do CD.

Wyrachowawszy linią GD, z proporcji  $EF:FC=ED:GD$ . znajdziemy ważność linii  $DH = \frac{DG^2}{ED}$ . W trójkącie DGZ, którego wiado-

mą jest przeciwprostokątną DZ, i jeden bok DG, wyrachuiemy  $GZ^2$ . Z proporcji  $EF^2:EC^2=GZ^2:HY^2$ , będzie można wyrachować  $HY^2$ : a zatem i HY, której równa się  $HY'$ . Dodając, i odejmując DH, znajdziemy DY, i  $DY'$ .

*Przykład.* Niech będzie  $AB=156$ .  $CD=328$ . i niech będzie stosunek dany AX, do CY, równy stosunkowi 3, do 5.

A że jest  $3:5=156:260$ ; więc  $CE=260$ ; a zatem  $DE=68$ .

Trzy ilości  $EF^2$ ,  $EC^2$ ,  $CF^2$ , są do siebie jak liczby, 34, 25, 9:

A że  $EF^2:FC^2=DE^2:DG^2$ ; więc  $34:9=68^2:DG^2$ ; a zatem  $DG^2=1224$ ,

a  $DH=\frac{1224}{260}=18$ .

Najmniejszą tedy ważność  $DZ^2$ , jest 1224. Niechby było  $DZ^2=50320$ , więc  $GZ^2=50320-1224=49096$ . A że  $34:25=49096:HY^2$ , więc  $HY=190$ .

$DY=HY+HD=190+18=208$ .  $DY'=HY'-HD=190-18=172$ .

$CY=120$ .  $AX=72$ .  $BX=84$ .

$CY'=500$ .  $AX'=300$ .  $BX'=144$ .

-Drugie rozwiązania, odpowiadają różnicy daney, ilości szukanych, a nie ich summie.

Niech będzie DL, prostopadła do CD, i spotykająca FE w L. Jeżeli DZ, jest daną mnieyszą, niż DL, tedy dwa punkta przecięcia Y, Y', przypadają między C, i D, a zatem dwie ważności linii wziętych na CD, są przydatne. W tym przypadku jeżeli DL, więkksza jest od DE, tedy dwa rozwiązania względem linii AB, są ujemne; ponieważ w tym razie linie ZY, Z'Y', będą miały położenia swoje z téj samey strony linii CD, z której jest linia Y'L'. Ale jeżeli w tymże przypadku, linia DL, jest mnieysza od DE, tedy jedno rozwiązanie, względem linii AB, będzie przydatne.

Wszystkie te przypadki można objaśnić, na przykładach liczebnych. Nakoniec podług wykreślenia poprzedzającego, można ustalić formę ogólną.

Niech będzie  $AB = a$ ;

$DC = b$ .

Niech będzie stosunek dany  $AX$ , do  $CY$ , równy stosunkowi  $AB$ , do  $CE$ , i niech będzie  $CE = c$ .

$DE = b - c$ . (w trzecim przypadku)

$$EF^2 : CF^2 = DE^2 : DG^2.$$

$$\text{czyli } aa + cc : aa = (b - c)^2 : DG^2 = \frac{aa}{aa + cc} (b - c)^2.$$

$$DH = \frac{DG^2}{DE} = \frac{aa}{aa + cc} (b - c)^2 : (b - c) = \frac{aa}{aa + cc} (b - c).$$

Niech będzie  $DZ^2 = q$ .

$$GL^2 = q - \frac{aa}{aa + cc} (b - c)^2 = \frac{q(aa + cc) - aa(b - c)^2}{aa + cc}.$$

$$\text{A że, } aa + cc : cc = \frac{q(aa + cc) - aa(b - c)^2}{aa + cc} : HY^2.$$

$$\text{Więc } HY = \frac{c}{aa + cc} \sqrt{q(aa + cc) - aa(b - c)^2}.$$

$$DY = \frac{c}{aa + cc} \sqrt{q(aa + cc) - aa(b - c)^2} + \frac{ga}{aa + cc} (b - c)$$

$$DY' = \frac{c}{aa + cc} \sqrt{q(aa + cc) - aa(b - c)^2} - \frac{aa}{aa + cc} (b - c)$$

Stąd łatwo już będzie, i innych ilości ważność oznaczyć.

179. Zadanie 19. Prostokąt pewny, ma dwa razy tak wielką długość, jak szerokość. Gdy do każdego boku jego dodamy po jednym stopie, powierzchnia zawierająca w sobie będzie słoń kwadr. 120.

Mianowanie: 1 wsza szerokość . . .  $x$ .  
1 wsza długość . . .  $2x$ .



$$2\text{ga szerokość} \quad \dots \quad x + 1.$$

$$2\text{ga długość} \quad \dots \quad 2x + 1.$$

$$2\text{ga powierzchnia} \quad \dots \quad 2xx + 3x + 1.$$

*Warunek.*  $2xx + 3x + 1 = 120.$

*Przerabianie.* (Odiawszy 1 po obu stronach)

$$2xx + 3x = 119.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 2)

$$xx + \frac{3}{2}x = 59\frac{1}{2}.$$

*Półowa Spółczynnika drugiego wyrazu, jest  $\frac{3}{4}$ , kwadrat  $\frac{9}{16}$ .*

(Dodawszy  $\frac{9}{16}$  do obu stron)

$$xx + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 59\frac{1}{2} + \frac{9}{16} = 60\frac{1}{16} = \frac{969}{16}.$$

(Wyciągnawszy pierwiątek kwadratowy)

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{969}{16}}.$$

(Odiawszy  $\frac{3}{4}$  po obu stronach)

$$x = \pm \sqrt{\frac{969}{16}} - \frac{3}{4}.$$

$$x = \pm \frac{31}{4} - \frac{3}{4} = \pm \frac{28}{4} = \pm 7.$$

*Rozwiązanie.*  $x = 7.$

$$2x = 14.$$

$$x + 1 = 8.$$

$$2x + 1 = 15.$$

*Sprawdzenie.*  $8 \times 15 = 120.$

$$16 \times 7\frac{1}{2} = 120.$$

*Uwaga.* Gdyby w drugim rozwiązaniu, brały się wyrazy przydane, tedy takowe rozwiązanie odpowiadałoby następującemu Zadaniu: Znaleźć Prostokąt, którego jeden bok, dwa razy jest tak wielki, jak drugi, i którego powierzchnia, odjęwszy od każdego boku po 1 stopie, byłaby 120 stóp kwadratowych.

Rozwią-

Rozwiązanie tego Zagadnienia, mogłoby też być przywiedzionem przez rozumowanie, do 7 Zadania tego Rozdziału.

Fig 36.

Niech będzie  $AXYZ$ , Prostokąt szukany, którego długość  $AX$ , dwa razy jest tak wielką, jak szerokość  $AZ$ . Niech równe linie  $AD$ ,  $BY$ , dodane do boków tego prostokąta, wystawiają nam długość jednej stopy, i niech po tém dodaniu powierzchnia prostokąta  $DXBC$ , będzie 120 stóp kwadr:

Powierzchnią tego prostokąta, zmniejszoną kwadratem  $CZ$ , zawierają 119 stóp kwadr. Ta powierzchnia tak zmniejszona, składa się z pierwszego Prostokąta  $AXYZ$ , i ze dwóch prostokątów  $DZ$ ,  $BZ$ , jednakię szerokości; a długość drugiego  $BZ$ , dwa razy będzie tak wielką, jak długość pierwszego  $DZ$ . Weźmy linią  $DE$ , dwa razy tyle, ile jest  $AD$ , i dopełnimy prostokąta  $EXYF$ . Prostokąt  $DF$ , równy będzie prostokątowi  $BZ$ : a zatem prostokąt  $EXYF$ , równy będzie prostokątowi  $DXBC$ , zmniejszonemu kwadratem  $CZ$ , więc ten prostokąt zawiera w sobie stóp kw. 119: Prostokąt zaś z linii  $EX$ ,  $AX$ , jako dwa razy tak wielki zawierać będzie stóp kwadr: 238. A że wiadoma jest różnica linii  $EX$ ,  $AX$ , to jest, linią  $AE$ , zawierającą 3 stopy, więc Zadanie wypada na to samo, co i Zadanie 7 tego Rozdziału.

*Insze przykłady.* Znaleźć Prostokąt, którego długość trzy razy tak wielką, jak szerokość; a gdy się doda po 2 stopy do każdego boku, powierzchnia będzie 260 stóp kwadr:

Najt kto pewną liczbę robotników, z których każdy bierze 4 razy tyle groszy, ile jest robotników: tenże przybrał drugą razą 3 jeszcze robotników więcej, i płaci każdemu z nich po 2 grosze drożej, niż pierwszym razem; wydał zaś tą drugą razą na tychże robotników groszy 456.

180. *Uwaga.* W Zagadnieniach tego gatunku, częstokroć się przytrafia, iż dla uwolnienia ilości niewiadomej, od spółczynnika, zawilem się czyni równanie, z przyczyny wprowadzonych ułomków: atoli można się ich uchronić, mnożąc równanie przez taką ilość, aby spółczynnika kwadratu ilości niewiadomej, uczynić kwadratem. I tak w równaniu  $3xx + 8x + 4 = 260$ , (które wypada z drugiego przykładu tego Zadania) rozmnóżwszy obiedwie strony przez 3, będzie  $9xx + 24x + 12 = 780$ . Uważając  $3x$ , jak ilość niewiadomą, czyli pierwszy wyraz pierwiastku kwadratowego pierwszej strony tego równania, przywiedziony do kwadratu, będzie  $24x$ , podwójnym wieloczynem drugiego wyrazu tegoż Pierwiastku rozmnóżonego przez pierwszy wyraz  $3x$ : albo, (co na jedno wychodzi) będzie  $24x$  pojedynczym Wieloczynem tego drugiego wyrazu, przez  $6x$ : więc drugi wyraz pierwiastku jest 4. Pierwszą tedy stronę równania przywiedź trzeba do tego, aby  
była

była kwadratem z  $3x + 4$ , to jest  $9xx + 24x + 16$ : co będzie gdy dodamy 4, do obu stron równania: tak albowiem wypadnie równanie  $9xx + 24x + 16 = 784$ , z którego wyciągniony pierwiastek kwadratowy, będzie  $3x + 4 = 28$ ; (opuszczimy pierwiastek ujemny) a zatem  $3x = 24$ ,  $1x = 8$ .

W pierwszym przykładzie tego Zadania, rozmnożywszy przez 2, równanie  $2xx + 3x = 119$ ; będzie  $4xx + 6x = 238$ . Ponieważ zaś pierwszy wyraz pierwiastku pierwszej strony, przywiedziony do kwadratu, jest  $2x$ ; więc drugi wyraz będzie wielorazem, z  $6x$ , podzielonych przez  $4x$ ; czyli z 6 podzielonych przez 4, który to wieloraz jest ułomkowy  $\frac{3}{2}$ . Gdy dla uchronienia się jego, rozmnożymy jeszcze całe równanie przez kwadrat mianownika tego ułomku, to jest przez 4, będzie  $16xx + 24x = 952$ .

W tym ostatnim równaniu, ponieważ  $4x$ , jest pierwszym wyrazem pierwiastku pierwszej strony; przywiedziony do kwadratu; więc wieloraz z 24, podzielonych przez 8, to jest 3, będzie drugim wyrazem tego pierwiastku, i całe równanie przywiedzione do tego, aby pierwiastka jego stroną, była kwadratem, będzie  $16xx + 24x + 9 = 961$ .

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy (przydatny)

$$4x + 3 = 31.$$

$$4x = 28.$$

$$1x = 7. \text{ tak iak wyżej.}$$

Wszystkie więc współczynniki wyrazów będą całkowite, używszy tego sposobu:

*W ogólności.* Niech będzie równanie  $axx + 2bx = p$ , które rozwiązać chcemy, chroniąc się ułomków w Przerabianiu.

Rozmnożywszy całe równanie przez  $a$ .

$$\text{będzie } aaxx + 2abx = ap.$$

Dopełnimy kwadraturę, dodawszy  $bb$ , po obu stronach:

$$\text{będzie } aaxx + 2abx + bb = ap + bb.$$

Wyciągnijmy pierwiastek kwadratowy.

$$\text{będzie } ax + b = \pm \sqrt{ap + bb}.$$

$$ax = \pm \sqrt{ap + bb} - b.$$

$$\pm \sqrt{ap + bb} - b.$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{ap + bb} - b}{a}.$$

$a.$

Jeżeli współczynnikiem drugiego wyrazu byłaby liczba nie parzysta  $c$ , tedy rozmnożyć trzeba równanie  $axx + cx = p$ , przez  $4a$ ; i będzie

$$4aaxx + 4acx = 4ap.$$

Gg

Drugi



Drugi wyraz Pierwiastku w pierwszém stronie równania, którą obró-  
cić mamy na kwadrat, będzie  $\frac{4ac}{4a} = c$ .

Dopełniwszy kwadratu, będzie

$$4a^2x^2 + 4acx + cc = cc + 4ap.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie

$$2ax + c = \pm \sqrt{cc + 4ap}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{cc + 4ap} - c}{2a}.$$

181. Zadanie 20. Prostokąt pewny ma dwa razy tak wielką dłu-  
gość jak szerokość. Gdy dodamy jedną stopę do jego długości, a odejmiemy jedną  
stopę od jego szerokości, powierzchnia mieć będzie stóp kwadratowych 90.

Mianowanie. 1wsza szerokość . . . . .  $x$ .  
1wsza długość . . . . .  $2x$ .  
2ga szerokość . . . . .  $x - 1$ .  
2ga długość . . . . .  $2x + 1$ .  
2ga powierzchnia . . . . .  $2xx - 1x - 1$ .

Warunek.  $2xx - 1x - 1 = 90$ .

Przerabianie. (Dodawszy 1 do obu stron)

$$2xx - 1x = 91.$$

(Rozmnożywszy obie strony przez 8.)

$$16xx - 8x = 728.$$

(Dopełniwszy kwadr: przez dodanie 1)

$$16xx - 8x + 1 = 729.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$4x - 1 = \pm 27.$$

(Dodawszy 1 po obu stronach)

$$4x = 28.$$

$$x = 7.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 4)

$$x = 7.$$

Rozwiązanie.  $x = 7$ . 1wsza szerokość.

$2x = 14$ . 1wsza długość.

$$x - 1 = 6.$$

$$x - 1 = 6. \text{ 2g\acute{a} szerokość.}$$

$$2x + 1 = 13. \text{ 2g\acute{a} długość.}$$

$$2xx - 1x - 1 = 90. \text{ 2g\acute{a} powierzchnia.}$$

Drugie rozwiązanie  $x = -6\frac{1}{2}$  uważane przydaynie, wychodzi na to, aby znaleźć prostokąt, którego długość byłaby dwa razy tak wielką jak szerokość, i do którego szerokości dodawszy 1 stopę, a od długości ująć 1 stopę, powierzchnia mieć będzie 90 stóp kwadratowych.

$$1\text{wsz\acute{a} szerokość} \dots\dots\dots 6\frac{1}{2}.$$

$$1\text{wsz\acute{a} długość} \dots\dots\dots 13.$$

$$2\text{g\acute{a} szerokość} \dots\dots\dots 7\frac{1}{2}.$$

$$2\text{g\acute{a} długość} \dots\dots\dots 12.$$

$$2\text{g\acute{a} powierzchnia} \dots\dots\dots 12 \times 7\frac{1}{2} = 90.$$

182. Uwaga. W każdym zagadnieniu, gdy już raz przywiedzione jest do równania, tedy potem nie myśli się więcej o zamiarze, który nam założono w témże zagadnieniu, ale się tylko zatrudnia około rozwiązania równania, w liczbach ogólnie, czyli oddzielnie branych; które to rozwiązanie zda się czasem być trudnem, gdy go przychodzi przystósować do zamiaru wyraźnego, któryśmy naprzód mieli przed oczyma. I tak w przykładzie poprzedzającym, gdyby zagadnienie podane było oddzielnie, tak na przykład: *Znaleźć dwie liczby, z których jedna byłaby dwa razy tak wielką, jak druga; i które nadto byłyby takie, że dodawszy 1, do jedney, a odjęwszy 1, od drugiej, wieloczyn byłby 90:* tedy drugie rozwiązanie zachowane uciennie, odpowiedzą tak zupełnie na zadanie, jak i rozwiązanie przydayne.

Toż samo zadanie można przywieść do zadania 7, w sposób następujący.

Niech będzie prostokąt  $AXYZ$ , którego długość  $AX$ , byłaby dwa razy tak wielką, jak szerokość  $XY$ . Do długości  $AX$ , dodamy  $AD$ , wyrażającą jedną stopę, a od szerokości  $XY$ , odejmiemy  $BY$ , wyrażającą także jedną stopę. Po téj odmianie powierzchni prostokąta  $DXBC$ , zawierać będzie stóp kwadr: 90. Dopelnimy kwadratu  $CZ$ , który má w sobie jedną stopę kwadratową: Summa prostokątów  $DZ$ ,  $AB$ , mieć będzie stóp kwadr: 91: czyli cały prostokąt  $DY$ , mniéj prostokątem  $BZ$ , zawierać będzie stóp kwadratowych 91. A że prostokąt  $BZ$ ; dwa razy jest tak wielki, jak prostokąt  $DZ$ ; więc wzięwszy  $AE$ , równą  $AD$ , i poprowadziwszy  $EF$ , równoległą od  $AZ$ , prostokąt  $EY$ , zawierać będzie 91 stóp kwadr: więc prostokąt z linii  $EX$ , przez linią  $AX$ , (dwa razy tak wielką jak  $AZ$ .) zawierać będzie 182 stóp kwadrat: Że zaś różnica linii  $AX$ , i  $EX$ , jest daną w jedney stopie; więc zagadnienie przywiedliśmy do zadania 7.

Fig. 37

*Inszé przykłady. Znaleźć prostokąt, którego długość byłaby trzy razy tak wielką, jak szerokość; gdy zaś dodamy 2 stopy do jego długości, a odejmiemy 3 stopy od jego szerokości, powierzchnia mieć będzie 92 stóp kwadr.*

*Znaleźć prostokąt, którego długość miałaby się do szerokości, jak 4 do 3; gdy zaś dodamy do szerokości jego stóp 2, a odejmiemy od długości stóp 3, powierzchnia będzie 182 stóp kwadr.*

183. Zadanie 21. Powierzchnia pewnego prostokąta ma stóp kwadr: 391. Gdy zaś do każdego jego boku dodamy po 1 stopie, powierzchnia jego mieć będzie stóp kwadr: 432.

Fig. 38.

Przez rozumowanie. Niech będzie XYZV, prostokąt szukany, któremu dodane są linie równe YP, VR, wyrażające 1 stopę. Różnica daną dwóch prostokątów, jest 41 stóp kwadr. A że ta różnica składa się ze dwóch prostokątów PZ, RZ, (których szerokości jest 1 stopa, a długość ich równa długości prostokąta szukanego XYZV) i z kwadratu QZ, który zawiera 1 stopę kwadr: więc summa dwóch tych prostokątów zawierać będzie 40 stóp kwadratowych. A że w szerokości swojej mają tylko 1 stopę; więc summa długości ich będzie 40 stóp: a zatem zagadnienie przywiedzione jest do zadania 8; i takby go można wyrazić: Znaleźć dwie linie, których summa jest 40 stóp, a prostokąt z nich 391 stóp kwadratowych. Kwadrat połowy różnicy tych linii jest 9, połowa ich różnicy 3, połowa summy 20: są zatem te linie szukané, jedna 17 stóp, druga 23.

*Algebraicznie.* Niech będzie 1 bok 1go prostokąta . . .  $x$ .

Będzie drugi bok jego . . .  $\frac{391}{x}$ .

Jeden bok 2go prostokąta będzie . . .  $x + 1$ .

Drugi bok jego będzie  $\frac{432}{x+1}$  albo  $\frac{391}{x} + 1$ .

*Warunek.*  $\frac{391}{x} + 1 = \frac{432}{x+1}$ .

*Przerób:* (Przywiódłszy dwa ułamki do jednakowego mianownika)

$$\frac{391x + 391}{xx + x} + 1 = \frac{432x}{xx + x}$$

(Odią-



(Odiąwszy 391x po obu stronach od liczników)

$$\frac{391}{xx+x} + 1 = \frac{41x}{xx+x}$$

(Obróciwszy 1 na ułamek)

$$\frac{391 + xx + x}{xx+x} = \frac{41x}{xx+x}$$

(Rozmnożywszy obie strony przez xx + x)

$$391 + xx + x = 41x$$

(Odiąwszy 41x po obu stronach)

$$xx - 40x + 391 = 0$$

(Dodawszy 9 do obu stron, aby trzeci wyraz stał się kwadratem z 20)  $xx - 40x + 400 = 9$ .

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$x - 20 = \pm 3$$

(Dodawszy 20 po obu stronach)

$$\begin{array}{l} x = 23 \\ \frac{391}{x} = 17 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ważność boków, które na przemian} \\ \text{przypadają.} \end{array} \right.$$

Rozwiązanie.  $x = 23$ . Jeden bok 1go prostokąta.

$$\frac{391}{x} = 17. \quad \text{Drugi bok 1go prostokąta.}$$

$$x + 1 = 24. \quad \text{Jeden bok 2go prostokąta.}$$

$$\frac{432}{x+1} = 18. \quad \text{Drugi bok 2go prostokąta.}$$

$$\frac{391}{x+1} + 1 = 18. \quad \text{Drugie wyrażenie tego ostatniego boku równe pierwszemu.}$$

184. *Przybliżowanie.* Spółób wyżej podany przez rozumowanie, użył nie tylko w tym razie, gdy dodania do obudwóch boków są równe, ale i w innych.

*Przykład.* Znaleźć prostokąt, którego powierzchnia zawiera 221 stóp kw. a dodawszy do jednego boku stóp 2, do drugiego stóp 3, zawierałaby 300 stóp kw.

Gg 3. Niech

Fig. 39.

Niech będzie XZ, prostokąt, którego powierzchnią zawiera 221 stóp kwadr. Niech bokami jego będą linie XY, XV, powiększamy pierwszą przez YP, oznaczającą 3 stopy, drugą przez VR, oznaczającą 2 stopy; i niech prostokąt XPQR, zawiera stóp kwadr: 300. Różnica tych dwóch prostokątów, jest 79 stóp kwadr: A że tę różnicę rozłożyć można na dwa prostokąty PZ, RZ, i na trzeci prostokąt QZ, który zawiera 6 stóp kwadr: więc summa prostokątów PZ, RZ, zawierać będzie 73 stóp kwadr: A że znowu te dwa prostokąty rozłożyć można, pierwszy na 3, a drugi na 2 prostokąty jednakowej szerokości, długość zaś trzech pierwszych, będzie YZ, (bok pierwszego prostokąta szukanego), a długość dwóch drugich będzie VZ, (bok drugiego tegoż prostokąta); i summa tych 5 prostokątów, równa się jednemu takiemu, któryby miał szerokość im równą, a długość równą, potrójnej linii YZ, i oraz podwójnej VZ; więc summa potrójnej YZ, i podwójnej VZ, czyni 73 stóp.

Niechby linią AB, była równa tej summie, niech linią AS, wyraża podwójną XY, czyli VZ, a linią BS, niech wyraża potrójną YZ, czyli VX.

Ponieważ prostokąt z linii XY, przez YZ, zawiera 221 stóp kwadr: więc prostokąt z AS, przez BS, sześć razy tak wielki, zawierać będzie 1326 stóp kwadr: A że summa linii AS, BS, oznaczają 73 stóp; więc połowa oznaczy  $36\frac{1}{2}$  stóp. Kwadrat połowy tej summy jest  $1332\frac{1}{4}$ , a nadmiar tego kwadratu nad 1326, to jest  $6\frac{1}{4}$ , czyli  $\frac{25}{4}$ , będzie kwadratem połowy różnicy, między AS, i BS, a zatem połowa tej różnicy jest  $\frac{5}{2}$ , czyli  $2\frac{1}{2}$ .

$$\text{Więc } BS = 36\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2} = \begin{matrix} 39. \\ 34. \end{matrix}$$

$$AS = 36\frac{1}{2} \mp 2\frac{1}{2} = \begin{matrix} 34. \\ 39. \end{matrix}$$

$$\text{A że jest } BS = 3YZ; \text{ więc } YZ = \begin{matrix} 13. \\ 11\frac{1}{3}. \end{matrix}$$

$$AS = 2XY; \text{ więc } XY = \begin{matrix} 17. \\ 19\frac{1}{2}. \end{matrix}$$

Więc w tym razie Zagadnienie ma dwa rozwiązania odmiennie, tak, jak wyżej.

*Algebraicznie.* Niech będzie bok XY = x.

$$YZ = \frac{221}{x}.$$

$$XP = x + 3.$$

$$XP = x + 3.$$

$$XR = \frac{300}{x+3} \text{ albo } \frac{221}{x} + 2.$$

*Warunek.*  $\frac{221}{x} + 2 = \frac{300}{x+3}.$

*Przerób:* (Przywiódłszy dwa ułamki do jednakowego mianownika)

$$\frac{221x + 663}{xx + 3x} + 2 = \frac{300x}{xx + 3x}.$$

(Odiąwszy 221x po obu stronach od Liczników)

$$\frac{663}{xx + 3x} + 2 = \frac{79x}{xx + 3x}.$$

(Obróciwszy 2 na ułamek)

$$\frac{663 + 2xx + 6x}{xx + 3x} = \frac{79x}{xx + 3x}.$$

(Rozmnożywszy obie strony przez mianownika)

$$663 + 2xx + 6x = 79x.$$

(Odiąwszy 79x po obu stronach)

$$2xx - 73x + 663 = 0.$$

(Rozmnożywszy wszystko przez 8, dla uniknienia ułamków)

$$16xx - 584x + 5304 = 0.$$

(Położywszy za trzeci wyraz kwadrat z 73)

$$16xx - 584x + 5329 = 25.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$4x - 73 = \pm 5.$$

(Dodawszy 73 po obu stronach)

$$4x = \frac{78}{68}.$$

Więc : :  $1x = \frac{19\frac{1}{2}}{17}$  tak iak się téż znalazło przez rozumowanie.

*Inszé przykłady.* Kupie kto pewną liczbę łokci materyi, za które płaci zł. 204. Inną razę kupie 5 łokci więcéj niż pierwszą innéj materyi, której łokieć płaci 4 złotemi drożey, niż łokieć pierwszy, i zapłacił 352 zł. Ileż łokci kupił, i iaką cenę łokieć tak pierwszy, iak i drugiéj materyi?

*Najęto*



Należy raz pewną liczbę robotników, i zapłacono im gr. 432.

Inną razą należy z robotnikami więcej, i każdemu z nich dano 4 gr. więcej: rozdano zaś dla wszystkich gr. 594.

Ileż było robotników, i ile każdemu z nich dano?

Uwaga. Zadanie następujące: Znaleźć prostokąt, którego wiadoma jest powierzchnia, i którego powierzchnia wiadoma także będzie, gdy od jego boków odejmiemy długości dane; to mówię zadanie, wychodzi na poprzedzające, uważając boki drugiego prostokąta, iakby powiększone, wtedy gdy się staia bokami pierwszego prostokąta.

185. Zadanie 23. Ma prostokąt 135 stóp kwadr. w powierzchni: gdy do jednego boku jego dodamy jedną stopę, a od drugiego odejmiemy także 1 stopę, powierzchnia jego mieć będzie 140 stóp kwadr.

Algebraicznie. Mianowanie Niech prostokąta pierwszego bok jeden będzie . . . . . x.

$$\text{Drugi będzie } \frac{135}{x}.$$

$$\text{Boki drugiego prostokąta, będą } x + 1, \text{ i } \frac{135}{x} - 1.$$

$$\text{albo } x + 1, \text{ i } \frac{140}{x + 1}.$$

$$\text{Warunek. } \frac{140}{x + 1} = \frac{135}{x} - 1.$$

Przerób: (Przywiódłszy ułamki do jednakowego mianownika)

$$\frac{140x}{xx + x} = \frac{135x + 135}{xx + x} - 1.$$

(Odiąwszy 135x po obu stronach od liczników)

$$\frac{5x}{xx + x} = \frac{135}{xx + x} - 1.$$

(Obróciwszy 1, na ułamek)

$$\frac{5x}{xx + x} = \frac{135 - xx - x}{xx + x}.$$

(Rozmno-

(Rozmnożywszy obie strony przez  $xx+x$ )

$$5x = 135 - xx - x.$$

(Dodawszy  $xx+x$  po obu stronach)

$$xx + 6x = 135.$$

(Dopełniwszy kwadratu 1wsz. strony)

$$xx + 6x + 9 = 144.$$

(Wyciągnawszy kwadrat z obu stron)

$$x + 3 = \pm 12.$$

(Odiąwszy 3, po obu stronach)

$$x = \frac{9}{-15}.$$

Rozwiąz:  $x = \frac{9}{-15}$ . Jeden bok 1go prostokąta.

$$\frac{135}{x} = \frac{15}{9}. \text{ Drugi bok 1go prostokąta.}$$

$$x + 1 = \frac{10}{-14}. \text{ Jeden bok 2go prostokąta.}$$

$$\frac{140}{x+1} = \frac{14}{-10}. \text{ Drugi bok 2go prostokąta,}$$

*Uwaga.* Wziąwszy drugie rozwiązanie przydać, wypadnie to na jedno co i pierwsze, sta tylko różnicą, że bok, który w pierwszym rozwiązaniu uważaliśmy, jako mający być zmniejszonym, w tym razie ma być powiększonym, i wzajemnie. Nie zawadzi tu powtórzyć uwagę Zadania 20.

Zadanie to można przywieść do Zadania 7, tym sposobem. Niech będzie XYVZ, Prostokąt szukany, którego powierzchnia zawiera 135 stóp kwadr. Odiąwszy od boku XY, linią YP, wyrażającą 1 stopę, a dodawszy do boku XV, linią VR, wyrażającą także jedną stopę, prostokąt XPQR, zawierając będzie stóp kwadr: 140.

Nadmiar drugiego prostokąta nad pierwszy jest 5 stóp kwadr: a że tym nadmiarem jest różnica prostokątów VQ, PZ; więc ta różnica jest 5 stóp Fig. 40. kwadr: a zatem powiększwszy prostokąt VQ, kwadratem QZ, różnica prostokątów RZ, PZ, będzie 6 stóp kwadr. A że obadwa te prostokąty mają w szerokości po 1 stopę; więc różnica ich długości, to jest linii VZ, YZ, będzie 6 stóp. Ze zaś prostokąt z tych linii, jest 135 stóp kwadr: więc (po dług Zadania 7) kwadrat połowy summy tych dwóch linii, jest 144 stóp kw.

Hh

a sama

a sama połowa ich summy 12: będą tedy te dwie linie  $12+3$ , i  $12-3$ , to jest 15, i 9.

186. *Przystósowanie.* Tén ostatni sposób postępowania, służy nie w tych tylko przypadkach, gdy powiększenie iednego boku równe jest zmniejszeniu drugiego boku, ale i w jnych.

*Przykład.* Prostokąt powierzchniá má 247 stóp kwadr: gdy się zaś dodadzą 3 stopy do iednego boku, a odeymą 2 stopy od drugiego, powierzchniá mieć będzie stóp kwadr: 272.

Fig. 41.

Niech będzie XYZ prostokąt, którego powierzchniá má 247 stóp kwadr: Od XY, odeymiemy PY, wyrażającą 2 stopy, a do XV, dodámy VR, wyrażającą 3 stopy. Powierzchniá prostokąta PQRX, mieć będzie stóp kwadr: 272. Różnica tych dwóch prostokątów jest 25 stóp kwadr. A że tą różnicą jest nadmiar prostokąta VQ, nad prostokąt PZ; więc różnica tych też dwóch prostokątów, jest 25 stóp kwadr: a zatem dodáwszy do prostokąta VQ, prostokąt QZ, zawierający 6 stóp kwadr: różnica dwóch prostokątów RZ, i PZ, będzie 31 stóp kwadr: Że zaś piérwszy z tych prostokątów rozłożyć można na insze trzy, mające 1 stopę w szerokości, a długości VZ, drugi także prostokąt rozłożyć można na dwa insze, mające 1 stopę w szerokości, a długość YZ; więc różnica tych dwóch prostokątów, równá się prostokątowi, mającemu 1 stopę za szerokość, a za długość różnicę między potrójną linią VZ, i podwójną YZ: a zatem  $3VZ - 2YZ = 31$  stóp.

Fig. 42.

Niech liniá BA, oznaczá 31 stóp, liniá zaś BS, niech oznaczá linią potrójną VZ: liniá zatem AS, oznaczáć będzie podwójną YZ. Ponieważ prostokąt z linii VZ, przez YZ, zawiera 247 stóp kwadr: więc prostokąt 6 razy tak wielki z linii BS, przez AS, zawierać będzie 1482 stóp kwadr: a zatem zagadnienie przywodzi się do tego, aby znaleźć dwie ilości AS, i BS, których różnica jest 31, Wieloczyn ich 1482.

Połowa różnicy jest  $15\frac{1}{2}$ , kwadrat téy połowy  $9\frac{5}{4}$ , kwadrat połowy summy, jest  $9\frac{5}{4} + 1482 = 6\frac{89}{4}$ .

Połowa więc summy  $= \pm 8\frac{3}{2}$ .

$$\begin{array}{rcl} \text{BS} & = & 57. \\ & - & 26. \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \text{AS} & = & 26. \\ & - & 57. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{VZ} & = & \frac{1}{3} \text{BS} = 19. \\ & - & 8\frac{2}{3}. \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \text{YZ} & = & \frac{1}{2} \text{AS} = 13. \\ & - & 28\frac{1}{2}. \end{array}$$

W drugim rozwiązaniu wziętém przydawnie trzebaby zamiast odjęcia 3 stóp, przydadź ie do piérwszego boku, zamiast przydania 2 stóp do drugiego boku, odjąć ie od tegoż boku: i wtedy obadwa rozwiązania, odpowiedać będą na Zadanie uważané Jeometrycznie. Spo-



Sposób rozwiązania Algiebraiczny, żadney nie ma trudności.

Insze przykłady. Kupiec zakupi pewną liczbę łokci materyi za 1728 zł. 24 łokci bierze na własnę używanie, a resztę sprzedaje za 1800 zł. zysku-  
ie na łokciu po 3 zł.

Ilę łokci kupił i po czemu, ile ich sprzedał i po czemu?

Inszy kupiec zapłacił zł. 1200 za pewną liczbę łokci materyi: gdyby  
zaś był kupił 16 łokci więcej materyi, którzy łokieć byłby tańszy 3 złotemi;  
tedyby go kosztowała tylko 1152 zł.

Pewną liczba przyjaciół złożyła się równie na 432 zł. dwóm z nich  
wrócili składkę, inni pozostali, przez co składka każdego z tych pozostałych powię-  
kszyła się 3 złotemi.

187. Zadanie 23. Dwa są prostokąty równé, których summa podstów  
wynosi na 100 stóp. Gdyby pierwszy z nich miał wysokość drugiego; tedyby  
w powierzchni swojej miał 720 stóp kwadr. Gdyby zaś drugi miał wysokość pier-  
wszego; tedyby w powierzchni swojej miał 320 stóp kwadr.

Algiebraicznie. Podstawa 1wzłego prostokąta . . . . . x.

280 . . . . . 100 — x.

720

Wysokość 2go . . . . . x

320

Wysokość 1go . . . . . 100 — x

320x

Powierzchnia 1go . . . . . 100 — x

72000 — 720x

Powierzchnia 2go . . . . .

$$\text{Warunek. } \frac{320x}{100 - x} = \frac{72000 - 720x}{x}$$

Przerób: (Przywiódłszy obadwa ułamki do jednakowego mianownika)

$$\frac{320xx}{x(100 - x)} = \frac{7200000 - 144000x + 720xx}{x(100 - x)}$$

(Rozmnożywszy wszystko przez  $x(100 - x)$ )

$$320xx = 7200000 - 144000x + 720xx$$

(Podzieliwszy obie strony przez 80)

$$4xx = 90000 - 1800x + 9xx.$$

(Odiąwszy 4xx od obu stron)

$$0 = 90000 - 1800x + 5xx.$$

(Podzieliwszy przez 5, i przelożywszy)

$$xx - 360x + 18000 = 0.$$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszy stronie)

$$xx - 360x + 32400 = 14400.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadr. z obu stron)

$$x - 180 = \pm 120.$$

(Dodawłszy 180 po obu stronach)

$$x = 300, \quad 100 - x = -200.$$

Rozwiązanie.  $x = 300.$  Podstawa 1go prostokąta.

$100 - x = -200.$  Podstawa 2go prostokąta.

$$\frac{720}{x} = \frac{12}{2\frac{2}{5}} \quad \text{Wysokość 2go prostokąta.}$$

$$\frac{320}{100 - x} = \frac{8}{-1\frac{3}{5}}. \quad \text{Wysokość 1go prostokąta.}$$

$$\frac{320x}{100 - x} = \frac{60 \times 8}{-1\frac{3}{5} \times 300} = \pm 480.$$

$$\frac{72000 - 720x}{x} = \frac{40 \times 12}{-200 \times 2\frac{2}{5}} = \pm 480.$$

Powierzchnie  
równe.

Drugie to rozwiązanie brałoby się przydać, gdyby nie summa, ale różnica podstaw była = 100.

188. Uwaga. W mianowaniu powyższem wyraziwszy dwie powierchnie w takowy kształt  $\frac{320 \times x}{100 - x}$ , i  $\frac{720 \times (100 - x)}{x}$ , i przywiódł-

szy te dwa ułamki do jednakowego mianownika, byłoby  $\frac{320 \times xx}{x(100 - x)}$ , i

i  $\frac{720 \times (100-x)^2}{x(100-x)}$ ; a zatem  $320 \times xx = 720 \times (100-x)^2$ ; a podzieli-

wszy przez 80;  $4 \times xx = 9 \times (100-x)^2$ ; wyciągnąwszy zaś pierwiastek kwadratowy  $2x = 3(100-x)$

Więc  $x : 100 - x = 3 : 2$ ; to jest stosunek dwóch podstaw, równa się stosunkowi 3, do 2.

A że suma tych podstaw jest 100; więc jedna z nich będzie  $\frac{3}{5}$ , a druga  $\frac{2}{5}$  stu; to jest 60, i 40: tak iak wyżej.

Używając proporcji toż samo nam wypadnie z uwag Jeometrycznych.

Niech linia AB, wyraża sumę daną dwóch podstaw AX, BX, na-  
leżących do dwóch prostokątów równych, których wylkości BZ, AY; więc Fig. 43.  
 $AX : BX = BZ : AY$ .

Rozmnożywszy dwa poprzedniki przez BZ, a 2 następni przez AY.

$$AX \times BZ : BX \times AY = BZ^2 : AY^2 = AX^2 : BX^2.$$

$$\text{A że} \dots \dots \dots AX \times BZ = 720 : BX \times AY = 320 ;$$

$$\text{Więc} \dots \dots \dots 720 : 320 = AX^2 : BX^2.$$

$$\text{albo} \dots \dots \dots 9 : 4 = AX^2 : BX^2.$$

A zatem  $\dots \dots \dots 3 : 2 = AX : BX$ : tak iak się znalazło sposobem Algiebraicznym.

Inszé przykłady. Dwie osoby niosły razem na sprzedaż 200 iay: powracając do domu z jednakową sumą pieniędzy za te iaię sprzedane. Gdyby zaś jedna z tych osób sprzedała była tak drogo każde iaię iak druga, a druga iak pierwszą; tedy pierwszay przypadłoby za nię gr: 180, a drugiay gr: 80.

Znayduie się w kupca pewna liczba sukna przedniejszego, i 90 tokei więcej nad pierwszē podleyszego: za wszystko to sukno podleyszē tylē razem bierze, ilē za przedniyszē. Gdyby zaś po tēy cenie przedał był sukno przedniyszē, po którēy przedał podleyszē, i wzaiēmuie; tedyby za pierwszē wziął 900 zł. a za drugiē 2500 zł.

189. Zadaniē 24. Dwóch kupców miało razem 10000 zł: zarabiać zaś tak iedn, iak drugi równo, w proporcji swēgo kapitału; i tylē, że pierwszy z nich za trzy lata, a drugi za dwa, mł 9900 zł. Jakiz był pierwiastkowy kapitał, pierwszego z tych kupców, a iaki drugiego?

Mianowanie. Kapitał 1go  $\dots \dots \dots x$ .

Kapitał 2go  $\dots \dots \dots 10000 - x$ .

Zysk 1go przez 3 lata  $\dots \dots \dots 9900 - x$ .

Hb 3

Zysk



$$\text{Zysk 1go przez 1 rok} = \frac{9900 - x}{3}$$

$$\text{Zysk 2go przez 2 lata} = \frac{x - 100}{x - 100}$$

$$\text{Zysk 2go przez 1 rok} = \frac{x - 100}{2}$$

Ponieważ zyski roczne tych dwóch kupców, mają się do siebie, jak ich kapitały; więc

$$\text{Warunek. } x : 10000 = x : \frac{9900 - x}{3} = \frac{x - 100}{2}$$

*Przerób:* (Przywiódłszy dwa wyrazy drugiego stosunku, do iednako-  
wého mianownika)

$$x : 10000 = x : \frac{19800 - 2x}{3} = \frac{x - 100}{2}$$

(Zrównawszy wieloczyn skrajnych wyrazów, i średnich)

$$3xx - 300x = 19800000 - 39800x + 2xx$$

(Odiawszy  $2xx$  od obu stron)

$$xx - 300x = 19800000 - 39800x$$

(Dodawszy  $39800x$  do obu stron)

$$xx + 39500x = 19800000$$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszej stronie)

$$xx + 39500x + 390062500 = 588062500$$

(Wyciągawszy pierwiastek kwadratowy)

$$x + 19750 = \pm 24250$$

$$x = \frac{4500}{-44000} = 4500$$

*Rozwiązanie.*  $x = 4500$  Kapitał 1go kupca.

$10000 - x = 5500$  Kapitał 2go.

$9900 - x = 5400$  Zysk 1go przez 3 lata.

$\frac{9900 - x}{3} = 1800$  Zysk 1go przez rok.

$\frac{x - 100}{x - 100} = 4400$  Zysk 2go przez 2 lata.

$\frac{x - 100}{2} = 2200$  Zysk 2go przez rok.

*Sprawdzenie.*  $1800 : 2200 = 4500 : 5500$

Jakoż  $1800 = 200 \times 9$ .

$2200 = 200 \times 11$ .

$4500 = 500 \times 9$ .

$5500 = 500 \times 11$ .

*Albo tak:* Niech linia A B, wystawia nam sumę dwóch ka- Fig. 44.  
pitałów, to jest, w przypadku terażniejszym 10000 Zł. Niech linie równe  
AD, BC, wyrażają majątki dane, jeden na końcu 3 lat, drugi na końcu 2  
lat, to jest 9900 Zł. Linie DX, CX, wyrażać będą zyski, w przeciągu tych  
dwóch czasów.

Będzie więc proporcya.

$DX : CX = 3AX : 2BX$ .

a zatem  $DX + CX : CX = 3AX + 2BX : 2BX$ .

to jest  $CD : CX = 2AB + AX : 2BX$ .

Niech będzie  $AE = 2AB$ .

więc  $CD : CX = EX : 2BX$ .

albo  $2CD : CX = EX : BX$ .

więc  $2CD : 2CD + CX = EX : EX + BX$ .

Niech będzie  $2CD = CF$ .

więc  $2CD : FX = 2CD : FX = EX : EX$ .

Więc zadanie przywieśliśmy do zadania 7 tego Rozdziału, tak prze-  
dłużając do X, linią daną EF, aby prostokąt  $EX \times FX$  był dany.

W przykładzie poprzedzającym  $AC = 100$ .

$CE = 20100$ .

$CF = 19600 = 2CD$ .

Więc  $EF = 500$ . Przeciąwszy EF, na

dwie równe części w G;

będzie  $FG = 250$ ;  $FG^2 = 62500$ .

$EB = 30000$ .

$2CD = 19600$ .

$2CD \times EB = 588000000$ .

$GX^2 = 588000000 + 62500 = 588062500$ .

$GX = \sqrt{588062500} = 24250$ .

A że  $AG = 19750$ ;

Więc  $AX = 4500$ . tak iak wyżej.

*Inszé przykłady.* Dwie osoby miały razem 120000 Zł: obie iednako-  
wo zyskują rocznie w proporcji swoich kapitałów. Jedna zaś z nich na koń-  
cu 3 lat, ma 70200 Zł. a druga na końcu 5 lat ma 99000 Zł.

*Ze dwóch*

Ze dwóch osób, jedna ma 40000 zł. więcej niż druga: obie jednakowo zyskują rocznie w proporcji swoich kapitałów: jedna zaś z nich na końcu lat 4, ma 217600 zł. druga na końcu lat pięciu, ma 174000 zł.

*Przeestroga.* Zyski na końcu każdego roku, nie łączą się tu wraz z kapitałami, i tylko pierwotny kapitał podług rachunku naizęgo, zysk sobie proporcjonalny co rok przynosi.

190 Zadanie 25. Dwóch kupców sprzedało po sztuce materji: jedna zaś z tych sztuk miała 5 łokci mniej niż druga; wzięli razem za obie te sztuki zł. 1200.

Kupiec, który sprzedał pierwszą materję, mówi tak do drugiego: Gdybym był miał twoją sztukę, i sprzedał ją po tój cenie, po której sprzedałem moją; byłbym wziął za nią zł. 540. Drugi zaś kupiec, mówi tak do pierwszego: Ja gdybym był sprzedał twoją sztukę po tój cenie, po której sprzedałem moją; byłbym wziął za nią zł. 720.

Mian: Liczba lokci r wżéy materyi . . . . . x.

 $x + 5$ 

Pierwszy kupiec byłby wziął zł. 540, za łokci  $x+5$ ; więc za 1 ł.

kieć wziął  $\frac{540}{x+5}$ , a za łokci  $x$ , wziął  $\frac{540x}{x+5}$ .

Drugi kupiec byłby wziął zł. 720, za łokci  $x$ ; więc za 1 łokieć wziął  $\frac{720}{x}$ , a za łokci  $x+5$ , wziął  $\frac{720x+3600}{x}$ .

$$\text{Warunek: } \frac{540x}{x+5} + \frac{720x+3600}{x} = 1290.$$

*Przerób:* (Przywiódłszy dwa ułamki do jednakowego mianownika)

$$\frac{540xx}{x(x+5)} + \frac{720(x+5)^2}{x(x+5)} = 1290.$$

(Rozmnożywszy obie strony przez  $x(x+5)$ )

$$540xx + 720(x+5)^2 = 1290xx + 6450x.$$

$$\text{also } 1260xx + 7200x + 18000 = 1290xx + 6450x$$

(Odiąwszy 1260xx po obu stronach)

$$7200x + 18000 = 30xx + 6450x.$$

(Odiawczy 7200x po obu stronach)

$$18000 = 30xx - 750x; \text{ also } 30xx - 750x = 18000.$$

(Podzie-



(Podzieliwszy przez 30 z obu stron)

$$xx - 25x = 600.$$

(Rozmnożywszy obie strony przez 4.)

$$4xx - 100x = 2400.$$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszej stronie)

$$4xx - 100x + 625 = 3025.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadr: po obu stronach)

$$2x - 25 = \pm 55.$$

(Dodawłszy 25 do obu stron)

$$2x = 80.$$

$$x = 40.$$

$$x = 40.$$

$$x = 15.$$

Rozwiąz.  $x = 40$ . Liczba łokci pierwszej sztuki.

$x + 5 = 45$ . Liczba łokci drugiej sztuki.

$\frac{540}{x + 5} = 12$ . Cena łokcia pierwszej sztuki.

$\frac{540x}{x + 5} = 480$ . Liczba zł: wziętych od 1go kupca.

$\frac{720}{x} = 18$ . Cena łokcia drugiej sztuki.

$\frac{720(x + 5)}{x} = 810$ . Liczba zł. wziętych od 2go kupca.

$\frac{x}{x} = 1$   
Sprawdzenie.  $480 + 810 = 1290$ .

Inszé przykłady. Sztuka jedna zawiera w sobie łokci 12 więcej niż druga. Za obie sztuki wzięto zł. 1756. Gdyby większą sztukę przedano w cenie sztuki mniejszej, przypadłoby za nią zł. 780; a gdyby sztukę mniejszą, przedano w cenie sztuki większej, przypadłoby za nią zł. 936.

Dwie sztuki zawierają razem łokci 120, i wzięto za nie zł. 1090. Za pierwszą sztukę przedaną w cenie sztuki drugiej, wzięłoby zł. 550. Za drugą sztukę przedaną w cenie sztuki pierwszej wzięłoby 520.

Jedna sztuka zawiera w sobie 16 łokci więcej niż druga, i więcej też za nią bierze się zł. 432, niż za drugą. Za pierwszą sztukę przedaną w ce-

nie sztuki drugiej wziętoby się zł 864, za drugą zaś przedaną po tęj cenie iak pierwszą, wziętoby się zł 960.

Dwie sztuki zawieiraia w sobie razém łokci 136, i wzięto za iedną wicelę zł. 192, niż za drugą. Za pierwszą sztukę przedaną, w cenie sztuki drugiej, wziętoby zł. 512. Za drugą sztukę, przedaną w cenie sztuki pierwszej, wziętoby zł. 864.

191. Zadanie 26. Znaleźć trzy liczby w proporcji Arytmetyczney, których summa kwadratów iest 200, a kwadrat średniy przewyższa wieloczyn skrajnych czterema iednościami.

Przez rozum. Kwadrat wyrazu średniogo, albo kwadrat połowy summy dwóch wyrazów skrajnych, przewyższa wieloczyn ty. hże skrajnych kwadratem połowy ich różnicy, albo kwadratem różnicy iednego z tych wyrazu, od wyrazu średniogo: więc kwadrat różnicy następny iednego wyrazu, od drugiego iest 4, a sama różnica iest 2. Summa kwadratów wyrazów dwóch skrajnych, wyrównywa dwa razy wziętemu kwadratowi połowy ich summy, z przydałym kwadratem połowy ich różnicy dwa razy także wziętym: albo podwójnemu kwadratowi wyrazu średniogo wraz z kwadratem różnicy następny dwa razy wziętym: toiest wraz z 8. Summa zaś kwadratów liczb trzech, wyrównywa trzy razy wziętemu kwadratowi wyrazu średniogo przydawszy 8: a zatem kwadrat potrójny wyrazu średniogo, równa się liczbie 200, mniej 8, toiest 192. Kwadrat wyrazu średniogo, iest trzecią częścią liczby 192, toiest 64: sam zaś wyraz średni iest 8. Dwa tedy wyrazy skrajne będą 8 + 2, i 8 — 2; toiest 10, i 6.

Liczby więc, których szukaliśmy są: 10, 8, 6: i łatwo można sprawdzić, że zadofyć czynią zadaniu.

Algiebr: Mian: Summa dwóch skrajnych	2x.
Różnica dwóch skrajnych	2y.
Dwa wyrazy skrajne	$x+y$ ; $x-y$ .
Wyraz średni	x.
Wieloczyn skrajnych	$xx-yy$ .
Kwadraty trzech wyrazów	$\left\{ \begin{array}{l} xx+2xy+yy. \\ xx. \\ xx-2xy+yy. \end{array} \right.$
Summa tych trzech kwadratów	$3xx + 2yy.$
<p>Warunek. <math>\left\{ \begin{array}{l} xx - (xx - yy) = 4. \\ 3xx + 2yy = 200. \end{array} \right.</math></p>	

Prze-

Przerób:  $\begin{cases} yy = 4. \\ 3xx + 2yy = 200. \end{cases}$

(Położywszy w drugiem równaniu zamiast  $yy$ , wartość jego wyprowadzoną z pierwszego równania)  $3xx + 8 = 200.$

(Odiąwszy 8 po obu stronach)  $3xx = 192.$

(Podzieliwszy przez 3)  $xx = 64.$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)  $x = \pm 8.$

A że jest  $yy = 4$ , więc  $y = \pm 2$ : tak jak wyżej.

*Uwaga.* Ścisłe mówiąc, Zadanie to ma cztery rozwiązania, wypadające z porównania każdego znaku wartości  $x$ , z każdym znakiem wartości  $y$ .

Cztery wartości pierwszego wyrazu, są

$$\begin{cases} + 8 + 2 \text{ albo } 10. \\ + 8 - 2 \dots\dots 6. \\ - 8 + 2 \dots\dots -6. \\ - 8 - 2 \dots\dots -10. \end{cases}$$

Cztery wartości trzeciego wyrazu, odpowiadające pierwszym czterem, są

$$\begin{cases} + 8 - 2 \text{ albo } + 6. \\ + 8 + 2 \dots\dots 10. \\ - 8 - 2 \dots\dots -10. \\ - 8 + 2 \dots\dots -6. \end{cases}$$

Tak dalece, że cztery następujące proporcye

$$\begin{cases} + 10, + 8, + 6. \\ + 6, + 8, + 10. \\ - 6, - 8, - 10. \\ - 10, - 8, - 6. \end{cases}$$

zadostyc czynią zadaniu: ale dwie pierwsze nie różnią się od siebie, tylko porządkiem wyrazów, a dwie drugie, nie różnią się od dwóch pierwszych, tylko znakami.

*Inszé przykłady.* Kwadrat wyrazu średniego, przewyższą liczbą 9  
Wieloczyn wyrazów skrajnych: summa zaś kwadratów jest 318.

Kwadrat wyrazu średniego, przewyższą liczbą 25 Wieloczyn wyrazów skrajnych, a summa kwadratów jest 557.

192. Zadanie 27. Znaleźć 4 liczby, którychby różnica następna była jednakową, i których wieloczyn dwóch średnich przewyższąby liczbą 8, Wieloczyn dwóch skrajnych: a summa kwadratów czterech tych liczb, byłaby 216.

*Mian:* Summa dwóch średnich . . . . . 2x

Różnica dwóch średnich . . . . . 2y.

Wyrazy dwa średnie . . . . .  $x+y, x-y.$



Dwa skrajne wyrazy znajdziemy, odiaawszy ieden sredni od drugiego podwoionego; beda wiec czterech liczb wyrazenia:

$$x + 3y, x + y, x - y, x - 3y.$$

Wieloczyn skrajnych . . . . .  $xx - 9yy.$

Wieloczyn srednich . . . . .  $xx - yy.$

Roznica tych wieloczynow . . . . .  $8yy.$

Kwadraty czterech wyrazow

$$\left[ \begin{array}{l} xx + 6xy + 9yy. \\ xx + 2xy + yy. \\ xx - 2xy + yy. \\ xx - 6xy + 9yy. \end{array} \right]$$

Summa tych kwadratow . . . . .  $4xx + 20yy.$

Warunek.  $\left[ \begin{array}{l} 8yy = 8. \\ 4xx + 20yy = 216. \end{array} \right.$

Przerob: (Podzieliwszy pierwsze rownanie przez 8, a drugie przez 4)

$$\left[ \begin{array}{l} yy = 1. \\ xx + 5yy = 54. \end{array} \right.$$

(Polozylwszy w drugim rownaniu waznosc  $yy$ , wyciagniona z pierwszego rownania)  $xx + 5 = 54.$

(Odiaawszy 5 po obu stronach)  $xx = 49.$

(Wyciagnawszy pierwiastek kwadratowy)  $x = 7.$

Liczy szukane . . .  $7 + 3, 7 + 1, 7 - 1, 7 - 3;$   
albo . . .  $10, 8, 6, 4.$  któreto

liczy czynia zadofy dwom warunkom.

Trzeba tu tę samę uwage uczynic wzgledem wielosci rozwiazan, ktoraśmy uczynili po zadaniu poprzedzajacem.

Insze przyklady, Roznica dwuch wieloczynow, jest . . . 32.

Summa czterech kwadratow . . . . . 864.

Roznica wieloczynow . . . . . 72.

Summa kwadratow . . . . . 964.

193. Zadanie 28. Podzielic liczbe daną 2a, na dwie takie czesci, aby kwadrat iedney, rownal sie wieloczynowi drugiey, przez cala liczbe daną.

Mianowanie. Niech bedzie iedna czesc . . . . .  $x.$

Bedzie druga . . . . .  $2a - x.$

Kwadrat pierwszej czesci . . . . .  $xx.$

Wieloczyn drugiej czesci, przez cala liczbe  $4aa - 2ax.$

Warunek.  $xx = 4aa - 2ax.$

Prze-

*Przerob:* (Dodawszy  $2ax$ , po obu stronach)  $xx + 2ax = 4aa$ .

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszój części)

$$xx + 2ax + aa = 4aa.$$

(Wyciągnawszy pierwiastek kwadr:)  $x + a = \pm a\sqrt{3}$ .

(Odiąwszy  $a$ , po obu stronach)

$$x = a(\sqrt{5}-1).$$

*Rozwiązanie.*  $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{a(\sqrt{5}-1)}$ . Część pierwszą.

$$2a - x = a \left( \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \right).$$

Część drugą.

$$aa \left( \frac{6-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} \right).$$

Kwadrat z pierwszój części.

$$aa \left( \frac{6-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} \right).$$

Wieloczyn z całej liczby przez część ię drugą.

194. *Uwaga pierwsza.* Pierwszą część drugiego rozwiązania wziętą przydać, odpowiadałaby na następujące Zadanie: Znaleźć dwie liczby, których różnica jest daną, i z których jednę kwadrat, równa się wieloczynowi drugiej, przez różnicę daną.

Gdyby więc różnica daną oznaczoną była przez  $2a$ ; tedy pierwszą liczbą byłaby  $a(\sqrt{5}+1)$ .  
drugą  $a(\sqrt{5}+3)$ .

Jakąkolwiek zaś będzie wartość spólną ilości  $a$ , wszelako dwóch części szukanych wypadną wartości niespólnie: którąto niespólnieść pochodzi z wyrażenia  $\sqrt{5}$ , wmieszanego w jedną ilość spólnie.

195. *Uwaga druga.* Te wyrażenia, dwoiakie Zadania rozwiązanie, i niespólnieść części szukanych, zgadzają się z wykreśleniem Jeometrycznym, gdy przecięć linią przypada w średnim i skrajnym stosunku; (in media & extrema ratione.)

Niechby linią AB, przecięć trzeba w punkcie X, na dwie takie części, aby kwadrat z linii AX, równał się Prostokątowi z całej linii AB, przez drugą część BX.

Wystawmy sobie, iakby już wykreślony kwadrat AXYZ, i prostokąt BXVC. Dopełniwszy kwadratu ABCD, linii AB, i dodawszy tak do kwadratu AY, iak do równego mu prostokąta BV. także sam prostokąt AXVD; prostokąt DVMZ, równy będzie kwadratowi danemu linii AB. Skąd wypada następujące wykreślenie: Wynieśmy linią AD, prostokąt do AB, i onę róż-

wną. Tę linią AD, przetniemy w punkcie E, na dwie równe części: i poprowadźmy EB. Z punktu E, iak od środka promieniem EB, wykreślimy koło, któreby przecinało w punkcie Z, linią AE, przedłużoną. Przenieśmy A Z, na AB, do X. Tén punkt X, będzie punktem podziału szukanym.

Koło wykreśloné, od środka E, promieniem EB, przecina w punkcie Z, linią AE, przedłużoną, za punkt D, i linią AZ, leżącą nie po téj stronie linii AB, po której leży linią AZ, iest względem niéy niemną: a zatem ponieważ linią AZ, przeniesioną iest na linią AB, od punktu A, ku B; więc linią AZ, má bydź przeniesioną na tęż linią AB, przedłużoną w stronę przeciwną do X. Wtedy linie AX, BX, będą takie, że ich różnicą będzie linią daną AB, a kwadrat z linii AX, równy będzie prostokątowi, z linii AB, przez BX: czego bardzo łatwo dowieśdź można Jeometrycznie.

Niech będzie  $AB = 2a$ : więc  $AE = \frac{1}{2}AB = a$ .

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4aa; + aa = 5aa; BE = a\sqrt{5}.$$

$$\text{Więc téż } EZ = a\sqrt{5}; AZ = a\sqrt{5} - a = a(\sqrt{5} - 1) = AX$$

$$BX = AB - AX = 2a - (a\sqrt{5} - a) = 3a - a\sqrt{5} = a(3 - \sqrt{5}).$$

$$\text{I znowu, } EZ = a\sqrt{5}; AZ = AX = a\sqrt{5} - a = a(\sqrt{5} - 1).$$

$$BX = AB + AX = 2a + a\sqrt{5} - a = 3a + a\sqrt{5} = a(3 + \sqrt{5}).$$

196. *Uwaga 3cia.* Lubo nie można dokładnie wyrazić dwóch części linii, albo liczby podzielonéy w taki sposób, iak Zadanie wyznacza; można jednak ważność tych części przybliżyć do prawdziwéy więcéy, niżby oznaczała iakąkolwiek różnica dana. Następujący Ciąg, (Series) dopełnia tego zamiaru: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597: 2584, 4181, i t. d.

W tym ciągu, każdy wyraz następny równa się summie dwóch wyrazów, które go tuż poprzedzają: a wzięwszy trzy którekolwiek następne wyrazy, kwadrat średniégó wyrazu, od wieloczynu dwóch skrajnych, różnicę się będzie jednością na przemiany, raz przez *Nadmiar*, (Excessus,) drugi raz przez *Niedmiar*, (defectus).

Przeto, ponieważ największą z tych trzech liczb, wyraża sumę dwóch innych; więc té dwie tym bliżéy wyrażać będą części odpowiadające na zadanie, im téż liczby większe będą. I tak niech będą té trzy liczby 5, 8, 13: kwadrat średniéy, różnicę się tylko będzie jednością od wieloczynu dwóch skrajnych, a tą różnicą iest  $\frac{1}{16}$  tegoż samégó kwadratu. Wzięwszy zaś trzy liczby 89, 144, 233; różnicą między takimże kwadratem, i takim wieloczynem, będzie  $\frac{1}{20000}$  tego kwadratu, lub tego wieloczynu,



*W ogólności.* Niech będą cztery, którekolwiek następne wyrazy ciągu poprzedzającego: niech na trzech pierwszych wyrazach prawdzi się, że kwadrat średniego z nich różni się jednością, przez nadmiar lub niedomiar od wieloczynu dwóch skrajnych: tedy i na trzech ostatnich wyrazach prawdzi się także będzie, że kwadrat średniego, różni się będzie od wieloczynu dwóch skrajnych jednością, ale przeciwnie przez niedomiar, lub nadmiar.

Oznaczymy cztery liczby następne przez  $a, b, a+b, a+2b$ .

Jeżeli  $bb = a(a+b) \mp 1$ .

tedy będzie także  $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp 1$ .

*Dowódz:* Przez przypuszczenie  $bb = aa + ab \mp 1$ .

więc  $bb \mp 1 = aa + ab$ .

Dodawszy  $ab + bb$  z obu stron)  $ab + 2bb \mp 1 = aa + 2ab + bb$ .

albo,  $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp 1$ .

A że to przypuszczenie prawdziwe jest co do trzech pierwszych wyrazów ciągu, więc prawdziwe jest także, i co do trzech którekolwiek następnych wyrazów tegoż ciągu.

*Inszé przykłady:* Podzielić 100 na dwie takie części, aby kwadrat iednój, równy był wieloczynowi drugiej przez 90.

Podzielić 144 na dwie takie części, aby kwadrat iednój równy był wieloczynowi drugiej przez 24.

*W ogólności:* podzielić ilość daną na dwie takie części, aby kwadrat iednój równy był wieloczynowi drugiej przez ilość także daną.

197. *Przystosowania Zadania poprzedzającego.*

Wyznaczyć trójkąt prostokątny, którego trzy boki czyniłyby ciągłą proporcją *Geometryczną*

Niech będzie XZY, trójkąt prostokątny, którego trzy boki, XY, XZ, Fig. 46. ZY, czynić mają ciągłą proporcją *Geometryczną*. Snućmy prostopadłą ZV.

Trzeba, aby było  $XZ^2 = XY \times ZY$ .

A że jest  $XZ^2 = XY \times XV$ .

Więc  $XY \times ZY = XY \times XV$ .

a zatem  $ZY = XV$ .

$ZY^2 = XV^2$ .

a że  $ZY^2 = XY \times VY$ .

Więc  $XV^2 = XY \times VY$ .

Więc przeciwprostokątna XY, trójkąta szukanego, powinna bydź przeciętą w punkcie V, spodnim przy prostopadłej; w słońku średnim, i skrajnym.

Kwa-

Kwadraty boków XY, XZ, ZY, będą do siebie, iak 2,  $\sqrt{5}-1$ , 3— $\sqrt{5}$ . Kwadrat wysokości VZ, będzie do kwadratu boku ZY, iak XV, do XY. Kwadrat zaś boku ZY, będzie do kwadratu boku XZ, iak VY, do VX. Aże  $XV : XY = VY : VX$ , więc,  $VZ^2 : ZY^2 = ZY^2 : XZ^2$ .

Więc trzy także linie XZ, ZY, VZ, czynią ciągłą proporcją: a zatem i trzy boki tego trójkąta, i czwarta wysokość, czynią także proporcją ciągłą, geometryczną.

Zadania podobne następującemu, są też tego samego gatunku, co i zadanie poprzedzające.

*Kupiec sprzedaż konia za 11 Cz: Zł: zyskał na nim tyle procentu od sta, ile go koni kosztował: czy więc dał za niego, i ile zyskał?*

Cena kupna tego konia, tak się ma do zysku w sprzedaży, iak summa 100 Cz: Zł: do téż ceny kupna: a zatem kwadrat liczby, oznaczający cenę kupna, równa się liczbie oznaczający zysk, rozmnożony przez 100. Więc trzeba podzielić cenę sprzedaży, 11 Cz: Zł: na dwie takie części, aby kwadrat jednéj równał się wieloczynowi drugiey przez 100.

*Mianowanie.* Cena kupna konia . . . . .  $x$ .  
Zysk w sprzedaży . . . . .  $11 - x$ .

*Warunek.*  $x : 11 - x = 100 : x$ .

*Przerób:* (Zrównawszy wieloczyny, skrajnych i średnich wyrazów)

$$xx = 1100 - 100x.$$

(Dodawszy  $100x$  po obu stronach)  $xx + 100x = 1100$ .

(Dopełniwszy kwadratu pierwszey strony)

$$xx + 100x + 2500 = 3600.$$

(Wyciągnawszy z obu stron pierwiastek kwadratowy,

$$x + 50 = 60.$$

(Odiąwszy 50 po obu stronach)  $x = 10$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 10$ . Cena kupna konia.

$$11 - x = 1. \text{ Zysk.}$$

*Sprawdzenie.*  $10 : 1 = 100 : 10$ .

*Inszé przykłady.* Cena sprzedaży jest 24, 39, 56, i t. d. Cz: Zł: reszta iak wużéy

198. Zadanie 29. Podzielić ilość daną  $2a$ , na dwie takie części, aby ich wieloczyn równał się różnicy ich kwadratów.

Mianowanie. Różnica dwóch części szukanych. . . .  $2x$ .  
 Części szukane . . . . .  $a+x, a-x$ .  
 Wieloczyn tych dwóch części . . . .  $aa-xx$ .  
 Kwadraty tych dwóch części . . .  $\begin{cases} aa+2ax+xx. \\ aa-2ax+xx. \end{cases}$   
 Różnica tych dwóch kwadratów . . .  $4ax$ .

Warunek.  $4ax = aa - xx$ .

Przerób: (Dodawszy  $xx$  po obu stronach)  $xx + 4ax = aa$ .

(Dopełniwszy kwadratu i wzięj strony)

$$xx + 4ax + 4aa = 5aa.$$

(Wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy)  $x + 2a = a\sqrt{5}$ .

(Odiąwszy  $2a$  po obu stronach)  $x = a(\sqrt{5}-2)$ .

Rozwiązanie.  $a+x = a(\sqrt{5}-1)$ .

$$a-x = a(3-\sqrt{5}).$$

Więc dwie szukane części są dwiema częściami summy daney, podzielonéy w stosunku średniego i skrajnym.

Sprawdz:  $(a+x)^2 = aa(6-2\sqrt{5})$ .

$$(a-x)^2 = aa(14-6\sqrt{5}).$$

$$4ax = aa(4\sqrt{5}-8).$$

$$aa-xx = aa(4\sqrt{5}-8).$$

Przykłady z ilościami niespółmiernymi. Podzielić sumę daną na dwie takie części, aby różnica ich kwadratów, tak się miała do ich wieloczynu, jak 3, do 2. Niechby znów różnica kwadratów, tak się miała do wieloczynu ze dwóch części, jak 8, do 3, albo jak 5, do 6.

199. Zadanie 30. Podzielić sumę daną  $2a$ , na dwie takie części, aby stosunek ich równy był stosunkowi summy ich  $2a$ , do ichże różnicy.

Mianowanie. Różnica dwóch ilości szukanych. . . .  $2x$ .

Ilości dwie szukane . . . . .  $a+x, a-x$ .

Warunek.  $a+x : a-x = 2a : 2x = a : x$ .

Przerób: (Dodając)  $2a : a+x = a+x : a$ .

więc  $(a+x)^2 = 2aa$ , to jest kwadrat jednéj części, ró-

Kk

wna



wną się połowie kwadratu summy daney: a zatem, tak się ma część większą, do summy dwóch części, jak bos kwadratu, do jego przeciwprostokątney.

$$\text{Rozwiązanie. } a + x = a\sqrt{2}$$

$$x = a(\sqrt{2} - 1).$$

$$a - x = a(2 - \sqrt{2}) = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1).$$

200. *Uwaga.* Ważność tych ilości niespółmiernych można do prawdziwéy przybliżyć, tak, jak tylko zechcemy, przez następujące ułamki;

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{12}{17}, \frac{29}{41}, \frac{70}{99}, \frac{169}{239}, \frac{408}{577}, \frac{985}{1393}, \frac{2378}{3363}, \text{ i t. d.}$$

W tym Ciągu licznik każdego ułamka, jest summa dwóch wyrazów ułamka poprzedzającego: a mianownik każdego ułamka, jest summa z jego licznika, i z licznika ułamku poprzedzającego.

Jeżeli mianownik iednego z tych ułamków oznaczy summa daną; tedy licznik jego i różnica dwóch jego wyrazów, to jest, licznika i mianownika, oznaczają będzie bardzo blisko dwie części szukane téy summy: albo co na iedno wychodzi, kwadrat mianownika ułamku każdego następnego w tym ciągu co raz bardziéy się przybliża do podwójnego kwadratu licznika jego.

*Przykład.* Kwadraty wyrazów ułamka  $\frac{12}{17}$ , są 144; i 289, drugi zaś z nich nie różni się tylko iednością od pierwszego kwadratu podwoio égo. Podobnie i kwadraty wyrazów ułamka  $\frac{70}{99}$ , są 9801, i 4900: z których pierwszy, różni się tylko iednością od drugiego podwoionego.

Summa dwóch części szukanych, té samé dwie części, i ich różnica, są do siebie tak prawie jak liczby 17, 12, 5, 7, albo jak liczby 99, 70, 29, 41; i mało co chybiać będą następujące proporeve:

$$12 : 5 = 17 : 7, \text{ albo } 12 : 17 = 5 : 7, \text{ ponieważ}$$

$$70 : 29 = 99 : 41, \text{ } 70 : 99 = 29 : 41,$$

w każdym stosunku, kwadraty następników, są prawie dwa razy tak wielkie, jak kwadraty poprzedników.

Można tu ielcze tę samą uwagę przydadź, którą się uczyniła (§. 196.)

201. *Zadanie 31.* Znaleźć dwie liczby, których wiadomy jest wieloczyn i różnica kwadratów.

Niech będzie ten wieloczyn 35, a kwadratów różnica 24.

*Sposób 1.* Nazwiemy iedną z liczb szukanych...  $x$ ; drugą zaś

bydź powinna  $\frac{35}{x}$ ; bo tak wieloczyn z nich wypadnie 35.

$$\text{Kwadraty tych dwóch liczb} \dots \left\{ xx, \text{ i } \frac{1225}{xx} \right.$$

*Ważu.*

Warunek.  $xx - \frac{1225}{xx} = 24.$

Przerób: (Rozm.: przez  $xx$  obie strony)  $x^4 - 1225 = 24xx.$   
 (Dodawszy 1225 po obu stronach)  $x^4 = 24xx + 1225.$   
 (Odiawszy  $24xx$  po obu stronach)  $x^4 - 24xx = 1225.$   
 (Dopełniwszy kwadratu w-pierwszém stronie)

$$x^4 - 24xx + 144 = 1369.$$

(Wyciągnawszy pierwiastek kwadratu z obu stron)

$$x^2 - 12 = \pm 37.$$

(Dodawszy 12 po obu stronach)  $xx = +49.$   
 $-25.$

(Wyciągnawszy znowu pierwiastek kwadratowy)

$$x = \pm 7.$$

$$\pm 5\sqrt{-1}.$$

202. Uwaga. To Zadanie zaprowadziło nas do równania, w którym ilość niewiadomą wziętą była 4 razy, i znowu 2 razy za Czynnika, (Factor,) to jest, że téj ilości wykładnik był 4, w jednym wyrazie, a 2, w drugim. Ale że *Mnogost.* (Potentia) ilości niewiadomej ( $x^4$ ), w pierwszym wyrazie jest kwadratem mnogości w drugim wyrazie ( $x^2$ ), i że w całym równaniu, nie ma więcej, jak te dwa wyrazy, w które ilość niewiadomą wchodzi; więc można się było obejść z tém równaniem, jak gdyby tylko było w drugim stopniu, wystawiając sobie  $xx$ , za ilość niewiadomą, a zatem wystawiając sobie drugi równania wyraz  $24xx$ , za podwójny wieloczyn ilości niewiadomej  $xx$ , przez drugi wyraz pierwiastku.

Łatwiej jeszcze to przerabianie zrozumiemy, położywszy ilość  $z$ , jednégo tylko *wymiarnu*, (dimensio) za ilość  $xx$ , dwóch wymiarów, a tak okaże się równanie w kształcie zwyczajnym.

$$zz - 24z = 1225.$$

Więc  $zz - 24z + 144 = 1369.$

$$z - 12 = \pm 37.$$

$$z = \frac{+49}{-25} = xx;$$

Więc  $x = \frac{\pm 7}{\pm 5\sqrt{-1}}$  tak jak wyżej.

$$\frac{35}{x} = \frac{35}{\pm 7} = \pm 5.$$

$$\frac{35}{+5\sqrt{-1}} = \frac{35\sqrt{-1}}{+5} = +7\sqrt{-1}.$$

Widzimy tu także, iż Zadanie to mieć może cztery rozwiązania, z których każde czyni zadość warunkom wyłożonym w témże Zadaniu.

Ilości dwie szukane, mogą mieć cztery odpowiadające im wartości:

$$+7, +5.$$

$$-7, -5.$$

$$+5\sqrt{-1}, -7\sqrt{-1}.$$

$$-5\sqrt{-1}, +7\sqrt{-1}.$$

Z tych czterech rozwiązań, ponieważ ostatnie dwa, są *bezsłotne*, (imaginarię) czyli nie podobne; więc je trzeba opuścić. Ze zaś dwa pierwsze, różnią się tylko samemi znakami, które nie czynią żadnej odmiany ani w wieloczynie, (dla jednakowości tychże znaków w czynnikach) ani w kwadratach; więc te dwa pierwsze rozwiązania, wychodzą na jedno co do wielkości: tak dalece, iż w każdym przystośowaniu tego Zadania, do *przedmiotów*, (objektów) istotnych, można wziąć dwie te wartości 7, i 5, za same i jedne ilości szukane.

*Sposób 2.* Summa dwóch ilości szukanych . . . 2f.

Różnica . . . 2d.

Ilości dwie szukane  $\begin{cases} f + d. \\ f - d. \end{cases}$

Wieloczyn . . .  $ff - dd$

Kwadraty . . .  $\begin{cases} ff + 2df + dd. \\ ff - 2df + dd. \end{cases}$

Różnica kwadratów . . . 4df.

*Warunek*  $\begin{cases} ff - dd = 35. \\ 4df = 24. \end{cases}$

*Przerób* (Strony 2go równania przez 2 podzieliwszy)

$$\begin{cases} ff - dd = 35. \\ 2df = 12. \end{cases}$$

(Skwadrowawszy strony obudwóch równań)

$$\begin{cases} f^2 - 2ddf + d^2 = 1225. \\ 4ddf = 144. \end{cases}$$

(Dodawszy strony odpowiadające sobie, w obudwóch równaniach)  $f^2 + 2ddf + d^2 = 1369.$

(Wycią-



(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$\sqrt{f} + dd = \pm 37,$$

a że  $\sqrt{f} - dd = 35.$

Więc dodawszy i odjąwszy strony sobie odpowiadające:

$$2\sqrt{f} = \begin{matrix} + 72 \\ - 2. \end{matrix}$$

$$\sqrt{f} = \begin{matrix} + 36 \\ - 1. \end{matrix}$$

Więc

$$2dd = \begin{matrix} + 2. \\ - 72. \end{matrix}$$

$$dd = \begin{matrix} + 1. \\ - 36. \end{matrix}$$

Porzuciwszy rozwiązania ujemne, z którychby wypadły pierwiastki bezistotne, zostaną dwa przydatne:

$$\sqrt{f} = 36; \quad dd = 1.$$

Więc  $f = \pm 6; \quad d = \pm 1.$

Wziąwszy i tu znowu same ważności przydatne, będzie

$$f = 6; \quad d = 1.$$

a zatem  $f + d = 7.$

$$f - d = 5. \quad \text{tak iak wyżej.}$$

Lubo to Zadanie zaprowadziło nas do równania zawierającego w sobie ilość niewiadomą, ze czterema wymiarami; można jednak toż Zadanie przewieść do Zadania 1go w tym Rozdziale, tak go wyrażając: *Znaleźć dwie liczby, których wiemy srosunek i wieloczyn. albo: Znaleźć dwie linie, których wiemy srosunek i prostokąt.*

203. *Mając wiadomy Wieloczyn dwóch liczb, lub prostokąt dwóch linii, i różnicę ich kwadratów, będzie w szczególności wiadomy srosunek tychże liczb, albo linii.*

Wystawmy sobie, iakoby dwie ilości szukané, były dwa ramiona kąta prostego w trójkącie prostokątnym XYZ. Spuścimy prostopadłą YP, na przeciw-prostokątną XZ, i przetniemy tę przeciw-prostokątną w punkcie S, na dwie równe części: z punktu S, poprowadźmy SY. Prostokąt ze dwóch linii XY, ZY, równa się prostokątowi z przeciw-prostokątnéy XZ, i z wysokości YP, (Jeom. Część I. §. 226.) Ponieważ zaś kwadraty z linii XY, i YZ, równé są, pierwszy prostokątowi z przeciw-prostokątnéy XZ, przez odcinek XP, drugi prostokątowi z téżé prostokątnéy XZ, przez odcinek ZP; (Część I. §. 126) więc różnica tych kwadratów, równa będzie prostokątowi z przeciwprostokątnéy XZ, przez różnicę linii XP, ZP, toieśt przez dwa razy wziętą SP. A że srosunek prostokąta, do różnicy kwadratów linii XY, i YZ, iest dany; więc téż i srosunek prostokątów z przeciwprostokątnéy przez PY, i przez 2SP, dany będzie: a zatem i srosunek linii PY, do SP, także dany będzie: a stąd

wiadomy także będzie, i słoſunek  $PY^2$ , do  $SP^2$ , jako téż i słoſunek  $PY^2 + SP^2 = SY^2 = SX^2 = SZ^2$ , do  $SP^2$ . Więć słoſunek linii  $SX$ , albo  $SZ$ , do  $SP$ , ieſt także dany: więc i słoſunek  $SX + SP$ , albo  $PX$ , do  $SZ - SP$ , albo  $PZ$  ieſt dany. A że ten oſtatni słoſunek, równa ſię słoſunkowi  $XY^2$  do  $ZY^2$ ; więc słoſunek  $XY^2$ , do  $ZY^2$ , a zatém i słoſunek  $XY$ , do  $ZY$ , ieſt dany.

W przykłaździe poprzedzającym;

$$\begin{aligned} XY^2 : ZY^2 : XY \times ZY &= 24 : 35. \\ \text{albo} \dots\dots\dots XZ \times 2SP : XZ \times PY &= 24 : 35. \\ \text{a zatém} \dots\dots\dots 2SP : PY &= 24 : 35. \\ \dots\dots\dots SP : PY &= 12 : 35. \\ \text{więć} \dots\dots\dots SP^2 : PY^2 &= 144 : 1225. \\ \text{więć} \dots\dots\dots SP^2 : SX^2 &= 144 : 1369. \\ \text{a zatém} \dots\dots\dots SP : SX &= 12 : 37. \\ \text{więć} \dots\dots\dots XP : PZ &= 49 : 25. \\ \text{albo} \dots\dots\dots XY^2 : YZ^2 &= 49 : 25. \\ \text{a zatém} \dots\dots\dots XY : YZ &= 7 : 5. \\ \text{więć téż} \dots\dots\dots XY^2 : XY \times YZ &= 7 : 5. \\ \text{A że ieſt} \dots\dots\dots XY \times YZ &= 35 \\ \text{więć} \dots\dots\dots XY^2 : 35 &= 7 : 5 = 49 : 35. \\ \text{więć} \dots\dots\dots XY^2 &= 49, \text{ a } XY = 7. \\ \text{Tak téż będzie} \dots\dots\dots YZ &= 5. \end{aligned}$$

Inſzć przykłaźdy. Wieloczyn dany . . . 77.

Różnica kwadratów . . . 72.

Wieloczyn dany . . . 425.

Różnica kwadratów . . . 336.

204. Zadanie 32. Znaléźć dwie liczby, których daná ieſt ſumma  $2f$ , i daná ſumma ich ſześciánów  $2c$ .

Mianowanie. Różnica liczb ſzukanych . . .  $2d$ .

Liczy ſzukane . . .  $f + d$   
 $f - d$ .

Sześciány liczb ſzukanych . . .  $\begin{cases} s^3 + 3s^2d + 3sd^2 + d^3. \\ s^3 - 3s^2d + 3sd^2 - d^3. \end{cases}$

Summa ſześciánów . . .  $2f^3 + 6fd^2$ .

Warunek.  $2s^3 + 6sd^2 = 2c$ .

Prze-

*Przerób:* (Podzieliwszy przez 2)  $s^3 + 3sd^2 = c$ .  
(Odiąwszy  $s^3$ )  $3sd^2 = c - s^3$ .

(Podzieliwszy przez  $3s$ )  $d^2 = \frac{c}{3s} - \frac{1}{3}s^2$ .

(Wyciągnąwszy pierw: kwadr:)  $d = \pm \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}}$

*Rozwiązanie.*  $s + d = s \pm \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}}$

$s - d = s \mp \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}}$

Dwie tedy szukane liczby, są  $s + \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}}$  i  $s - \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}}$ .

*Sprawdzenie.*

$$\begin{aligned} \left(s + \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}}\right)^3 &= s^3 + 3s^2 \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}} + 3s \left(\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}\right) + \left(\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}\right) \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}} \\ \left(s - \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}}\right)^3 &= s^3 - 3s^2 \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}} + 3s \left(\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}\right) - \left(\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}\right) \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Summa} \quad 2s^3 + 6s \left(\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}\right) = 2s^3 + 2c - 2s^3 = 2c.$$

$$2s = 12; \quad 2c = 468.$$

$$\text{Przykłady. } 2s = 22; \quad 2c = 2926.$$

$$2s = 28; \quad 2c = 6244.$$

205. Zadanie 33. Znaleźć dwie liczby, których wiadoma jest różnica  $2d$ , i różnica ich sześciątów  $2c$ .

*Mianowanie.* Summę dwóch liczb szukanych, oznaczywszy przez  $2s$ , znajdziemy tymże sposobem, iak w mianowaniu poprzedzającym, że różnica sześciątów będzie  $6sd + 2d^3$ .

*Warunek.*  $6sd + 2d^3 = 2c$ .

*Przerób:* (Odiąwszy  $2d^3$ )  $6sd = 2c - 2d^3$ .

(Podzieliwszy przez  $6d$ )  $s = \frac{c}{3d} - \frac{1}{3}d^2$ .

(Wycią-



$$(\text{Wyciąg: pierw: kwadr:}) f = \pm \sqrt{\frac{c}{3d} - \frac{1}{3}dd} = \sqrt{\frac{c}{3d} - \frac{1}{3}dd}$$

*Uwaga.* To wyrażenie ilości  $f$ , w ilości  $d$ , jest to samo, które było ilości  $d$ , w ilości  $f$ , w poprzedzającym zagadnieniu.

*Przykłady.*  $2d = 2; 2c = 218.$   
 $2d = 4; 2c = 1468.$   
 $2d = 6; 2c = 3582.$

Zadania następujące, Znaleźć dwie liczby, których summa i różnica sześciątów jest w. ad ma: albo, których wiadoma jest różnica, i ich sześciątów summa: nie mogą być przywiedzione do drugiego stopnia: i przelżyby granice wymierzone téy początkowéy. Algiebrze.

206. Zadanie 34. Znaleźć dwie liczby, których wiadoma jest summa, i summa ich czwártych mnogości. (\*)

Niech będzie dwóch liczb summa daná . . .  $2f.$

Tychże liczb, czwártych mnogości summa . . .  $2q.$

*Mian:* Różnica szukana tych liczb . . .  $2d.$

a zatém té dwie liczby szukane . . .  $f+d, f-d.$

Czwárté mnogości tych liczb  $\begin{cases} f^4 + 4f^3d + 6f^2d^2 + 4fd^3 + d^4. \\ f^4 - 4f^3d + 6f^2d^2 - 4fd^3 + d^4. \end{cases}$

Summa . . .  $2f^4 + 12f^2d^2 + 2d^4.$

*Warunek.*  $2d^4 + 12fdd + 2s^4 = 2q.$

*Przerób:* (Podzieliwszy przez 2).  $d^4 + 6fdd + s^4 = q.$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszém stronie)

$$d^4 + 6fdd + 9s^4 = q + 8s^4.$$

(Wyciągnąwszy pierw: kwadr:)  $d^2 + 3s^2 = \pm \sqrt{q + 8s^4}.$

(Odiąwszy  $3s^2$ ) . . .  $d^2 = \pm \sqrt{q + 8s^4} - 3s^2.$

Opuściwszy drugie rozwiązanie, dla tego, iż na  $dd$ , idzie ważność niemną; będzie  $dd = \sqrt{q + 8s^4} - 3s^2.$

(\*) Czwártą mnogością ilości iakiéy, naprzykład liczby, nazywamy tén wieloczyn, który urości z jednéy liczby cztery razy wzięty za czynnik; albo co na jedno wychodzi, gdy kwadrat iakiéy liczby przez ténże sam kwadrat rozmnożymy; zrobi się wieloczyn, który zowiemy *czwártą mnogością* téy liczby. Po łacinie nazywa się to *quarta potentia*.

Więc  $d = \pm \sqrt{\sqrt{(q + 8s^4)} - 3s^2}$ .

$$f + d = \pm \sqrt{\sqrt{(q + 8s^4)} - 3s^2}$$

$$f - d = \pm \sqrt{\sqrt{(q + 8s^4)} - 3s^2}$$

Té ważności, są wzglę-

dém siebie *wzajemnie*, (reciproca) tak iak w rozwiązaniu zadania 32.

Przykłady.  $2f = 8$ ;  $2q = 706$ .

$$2f = 10$$
;  $2q = 2482$ .

$$2f = 12$$
;  $2q = 3026$ .

Tymże sposobém rozwiązać można następujące zadanie: 'Znaleźć dwie liczby, których wiemy różnicę, i których wiemy także różnicę czwartych mnożności.

207. Zadanie 35. Znaleźć dwie liczby, których summa jest wiadoma, i wiadoma także summa ich piątych mnożności.

Niech będzie dwóch liczb summa dana  $2f$ .

Piątych ich mnożności summa  $2q$ .

Mianowanie. Różnica tych liczb szukana  $2d$ .

$$\text{Liczby szukane} \begin{cases} f + d \\ f - d \end{cases}$$

$$\text{Piąte ich mnożności} \begin{cases} s^5 + 5s^4d + 10s^3d^2 + 10s^2d^3 + 5sd^4 + d^5 \\ s^5 - 5s^4d + 10s^3d^2 - 10s^2d^3 + 5sd^4 - d^5 \end{cases}$$

$$\text{Summa} \quad 2s^5 \quad + 20s^3d^2 \quad + 10sd^4.$$

$$\text{Warunek. } 10sd^4 + 20s^3d^2 + 2s^5 = 2q.$$

$$\text{Przerób: (Podzieliwszy przez } 10s) \quad d^4 + 2s^2d^2 + \frac{1}{5}s^4 = \frac{q}{5s}.$$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszém słonie przez dodanie  $\frac{4}{5}s^4$ )

$$d^4 + 2s^2d^2 + s^4 = \frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4.$$

$$\text{(Wyciągnąwszy pierw: kwadr:) } d^2 + s^2 = \sqrt{\left(\frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4\right)}$$

$$\text{(Odiąwszy } s^2) \quad d^2 = \sqrt{\left(\frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4\right)} - s^2.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$d = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4} - s^2\right)}.$$

$$s+d = s + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4} - s^2\right)}.$$

$$s-d = s - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4} - s^2\right)}.$$

Przykłady.  $2s = 8$ ;  $2q = 3368$ .

$2s = 10$ ;  $2q = 17050$ .

$2s = 12$ ;  $2q = 19932$ .

Tymże sposobem rozwiązujemy następujące Zadanie: Znaleźć dwie liczby, których wiadoma jest różnica, i wiadoma jest także różnica piątych ich potęg.

208. Zagadnienie niewyznaczone. (indeterminatum).

Znaleźć trzy liczby, których wiemy sumę, wiemy także sumę ich kwadratów, i sumę wieloczynów tychże liczb branych parami.

W tym zadaniu trzy są ilości szukane, i zdaie się, że także trzy warunki są dane: a zatem zagadnienie zdaie się być wyznaczonem. Ale że trzeci warunek jest koniecznym wnioskiem ze dwóch pierwszych; przeto zagadnienie jest w samej rzeczy niewyznaczone.

Jakoż niech będą  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , trzy ilości szukane, których Summa  $s$ .

Ponieważ  $(x+y+z) = s$ .

będzie  $(x+y+z)^2 = ss$ .

albo  $xx + 2xy + yy + 2xz + 2yz + zz = ss$ .

czyli  $(xx + yy + zz) + 2(xy + xz + yz) = ss$ .

A że  $(xx + yy + zz)$  jest sumą kwadratów ilości trzech szukanych.

a  $2(xy + xz + yz)$  jest podwójną sumą wieloczynów tychże ilości, branych parami; więc summa ich wieloczynów tak branych jest już wyznaczona przez sumę tychże ilości, i przez sumę ich kwadratów: to jest, sumą tych trzech wieloczynów będzie połowa nadmiaru kwadratu summy trzech ilości, nad sumę ich kwadratu.

Tymże wcale sposobem okazaćby można, że kwadrat summy iluśkolwiek ilości składa się z summy kwadratów tychże ilości, i z podwójnej summy wieloczynów tychże ilości po dwie branych: a zatem summa taká wiel-

loczy-



iloczynów, zawsze jest połową nadmiaru kwadratu summy tych ilości, nad summę ichże kwadratów.

Jakoż niech będzie  $a + b + c + d + e + f + g$ , i t. d. Summa ila-  
kolwiek ilości: Kwadrat téj summy, składa się z kwadratu pierwzeyer ilości,  
z summy podwójnych wieloczynów téj pierwzeyer ilości przez wszystkie in-  
ne ilości i z kwadratu summy tychże innych ilości. Tén ostatni kwadrat,  
składa się z kwadratu drugiey ilości, z summy podwójnych wieloczynów téj-  
że ilości, przez wszystkie inne pozostałe, i z kwadratu tych ostatnich ilości  
pozostałych: który to znowu kwadrat, składa się z kwadratu trzeciey ilości,  
z summy podwójnych wieloczynów téjże ilości przez wszystkie inne pozo-  
stałe, i z kwadratu tychże ostatnich ilości. i t. d.

I tak,  $(a + b + c + d)^2 = aa + 2ab + 2ac + 2ad + bb + 2bc + 2bd + cc + 2cd + dd = (aa + bb + cc + dd) + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$ .

209. Drugie zagadnienie niewyznaczone. Znaleźć proporcję Arytmetyczną, której wiemy summę czterech wyrazów, summę ich kwadratów, i summę ich sześciątów.

Ponieważ summa wyrazów skrajnych proporcji szukaney równać się powinna summie wyrazów średnich; więc tak pierwszą, iak i drugą ta summa, równa będzie połowie summy daney czterech wyrazów: a zatem jeżeli summę czterech wyrazów nazwiemy  $4s$ ; summa dwóch skrajnych, albo dwóch średnich

Niech różnica średnich będzie  $2x$ . (dnich, będzie  $2y$ .)

Różnica skrajnych  $2y$ .

Będą cztery wyrazy proporcji . . .  $\begin{cases} s + y. \\ s + x. \\ s - x. \\ s - y. \end{cases}$

Kwadraty . . .  $\begin{cases} s^2 + 2sy + yy. \\ s^2 + 2sx + xx. \\ s^2 - 2sx + xx. \\ s^2 - 2sy + yy. \end{cases}$

Summa kwadratów . . .  $4s^2 + 2(xx + yy)$ .

Sześciąt . . .  $\begin{cases} s^3 + 3s^2y + 3sy^2 + y^3. \\ s^3 + 3s^2x + 3sx^2 + x^3. \\ s^3 - 3s^2x + 3sx^2 - x^3. \\ s^3 - 3s^2y + 3sy^2 - y^3. \end{cases}$

Summa sześciątów . . .  $4s^3 + 6s(xx + yy)$   
Ll 2 W wy-

W wyrażeniu summy kwadratów sama tylko summa  $xx + yy$ , jest niewiadomą, i tak także summa jest ilością niewiadomą w summie sześciannów. A w szczególności: summa summy sześciannów ilości czterech w proporcji Arytmetycznej, i sześciannu połowy summy tychże czterech ilości, jest potrójną wieloczynu z summy kwadratów tychże ilości, przez czwartą część ich summy.

$$\text{Jakoż pierwszą summa jest } 12s^3 + 6s(xx + yy) = 3(4s^3 + 2s^2xx + yy)) \\ = 3s(4s^2 + 2s(xx + yy)).$$

210. Trzecie Zagadnienie niewyznaczone.

Wyznaczyć proporcję Geometryczną, której wiemy summy skrajnych, i summy średnich wyrazów, i nadmiar summy kwadratów z skrajnych, nad summy kwadratów z średnich.

Ponieważ cztery wyrazy szukane mają ułożyć proporcję Geometryczną; więc wieloczyn skrajnych będzie równy wieloczynowi średnich. Kwadrat dany summy skrajnych równy jest summie kwadratów tychże skrajnych, i podwójnego ich wieloczynu; a kwadrat dany summy średnich równy także jest summie kwadratów tychże średnich, wraz z wieloczynem ich podwójnym, albo wraz z podwójnym wieloczynem skrajnych. Więc różnica tych dwóch kwadratów równa będzie różnicy między summą kwadratów skrajnych, i summą kwadratów średnich: a zatem ta ostatnia różnica wyznaczona jest przez różnicę między kwadratami summy skrajnych, i kwadratami summy średnich.

Fig. 48.

Geometrycznie. Niech średnica  $AB$ , oznacza summy skrajnych wyrazów, to jest największego i najmniejszego, i niech cięciwa  $DE$ , oznacza summy średnich. Niech będą skrajne  $AX$ ,  $BX$ ; a średnie  $DX$ ,  $EX$ . Od środka  $C$ , spuśmy  $CF$ , prostopadłą do  $DE$ , i poprowadźmy promień  $CE$ .

$$AX^2 + BX^2 = 2CB^2 + 2CX^2.$$

$$EX^2 + DX^2 = 2EF^2 + 2FX^2.$$

$$\text{Więc; } (AX^2 + BX^2) - (EX^2 + DX^2) = 2CB^2 - 2EF^2 + (2CX^2 - 2FX^2) \\ = 2CB^2 - 2EF^2 + 2CF^2. \\ = 2CB^2 - 4EF^2 + (2CF^2 + 2EF^2) \\ = 2CB^2 - 4EF^2 + 2CB^2. \\ = 4CB^2 - 4EF^2. \\ = AB^2 - ED^2.$$

Niech summa daną skrajnych będzie . . . . . 2a.

. . . . . średnich . . . . . 2b.

Różnica skrajnych . . . . . 2x.

. . . . . średnich . . . . . 2y.

Skrajne

$$\text{Skrajne} \begin{cases} a + x. \\ a - x. \end{cases}$$

$$\text{Średnie} \begin{cases} b + y. \\ b - y. \end{cases}$$

$$\text{Kwadraty skrajnych} \begin{cases} aa + 2ax + xx. \\ aa - 2ax + xx. \end{cases}$$

$$\text{Kwadraty średnich} \begin{cases} bb + 2by + yy. \\ bb - 2by + yy. \end{cases}$$

$$\text{Summa kwadratów skrajnych} \dots \dots \dots 2aa + 2xx.$$

$$\dots \dots \dots \text{średnich} \dots \dots \dots 2bb + 2yy.$$

$$\text{Różnica tych dwóch summ} \dots \dots 2aa + 2xx - (2bb + 2yy). \\ = 2(aa - bb) + 2(xx - yy).$$

$$\text{Przez przypuszczenie, jest } ax - xx = bb - yy.$$

$$\text{albo } xx - yy = aa - bb.$$

$$\text{więc } 2(xx - yy) = 2(aa - bb).$$

$$\text{a zatem } 2(aa - bb) + 2(xx - yy) = 4(aa - bb). \\ = 4aa - 4bb.$$

2. Tymże sposobem można by okazać, że gdyby daną była różnica dwóch wyrazów skrajnych, różnica dwóch wyrazów średnich, i nadmiar summy kwadratów skrajnych, nad sumę kwadratów średnich; Zagadnienie to, byłoby także nie wyznaczonem: ponieważ ten ostatni nadmiar jest równy różnicy kwadratów dwóch różnic danych

3. I to także Zagadnienie byłoby niewyznaczonem, gdyby nam wiadomą była summa skrajnych wyrazów, (náywiększego i náy mniejszego) różnica średnich, i summa kwadratów czterech wyrazów: ponieważ ta ostatnia summa równa jest summie kwadratów summy skrajnych, i różnicy średnich wyrazów.

211. Następujące jednak Zagadnienia są wyznaczonemi.

1. Wiadomą jest summa skrajnych, summa średnich, i summa kwadratów ilości czterech.

2. Wiadomą jest różnica skrajnych, różnica średnich, i summa kwadratów ilości czterech.

3. Wiadomą jest summa skrajnych, różnica średnich, i nadmiar summy kwadratów skrajnych nad sumę kwadratów średnich.

4. Wiadomą jest różnica skrajnych, summa średnich, i summa kwadratów ilości czterech.



5. Wiadoma jest różnica skrajnych, summa średnich, i różnica między sumą kwadratów skrajnych, a sumą kwadratów średnich.

*Przykład.* Ponieważ summa kwadratów ze czterech wyrazów proporcji geometrycznej równa się summie kwadratów summy skrajnych, i różnicy średnich téż proporcji; więc pierwsze dwie summy mając dane, będzie tém samém dana i różnica średnich: a zatem jeżeli summa tychże średnich jest dana, będą obadwa w szczególności wiadome.

Niech będzie  $2f$  summa skrajnych.

$4q$  Summa 4 kwadratów.

$2m$  Summa dwóch średnich.

Kwadrat różnicy dwóch średnich  $4q - 4f = 4(q - f)$ .

Różnica dwóch średnich  $2\sqrt{(q - f)}$ .

Wyrazy średnie  $\begin{cases} m + \sqrt{(q - f)} \\ m - \sqrt{(q - f)} \end{cases}$ .

Wieloczyn tych średnich, a zatem i skrajnych.

$mm - (q - f) = mm - q + f$ .

Kwadrat połowy różnicy dwóch skrajnych.

$f - (mm - q + f) = q - mm$ .

Więc różnica skrajnych  $\sqrt{(q - mm)}$ .

*Proporcja*

$f + \sqrt{(q - mm)} : m + \sqrt{(q - f)} = m - \sqrt{(q - f)} : f - \sqrt{(q - mm)}$

## ROZDZIAŁ VII.

### § Ciągach Arytmetycznych.

212. **T**en szereg, (series) liczb nazywamy *Ciągiem Arytmetycznym*, (Progressio Arithmetica) gdzie różnica dwóch liczb następujących po sobie idących jest iednakową.

I tak, szereg liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.  
i t. d.

Szereg liczb nieparzystych 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.  
i t. d. nazywają się *Ciągiem Arytmetycznym*.

W pier-

W pierwszym z tych szeregu różnica dwóch wyrazów blizkich jest 1; w drugim szeregu ta różnica jest 2.

W pierwszym szeregu, każdy wyraz równa się liczbie oznaczającej miejsce, które ten wyraz zastępuje w tym szeregu.

I tak dziesiąty *np.* wyraz w tym szeregu liczb naturalnych będzie 10, dwudziesty wyraz 20, setny 100 i t. d. a w ogólności wyraz *nty*, będzie *n*.

W drugim szeregu, pierwszy wyraz jest 1; drugi ma więcej 2, jednościami od pierwszego, trzeci ma więcej 2 jednościami od drugiego; takić więc bydz może iego oznaczenie  $1 + 2 \times 2$ ; czwarty ma więcej, dwoma jednościami od trzeciego; takić więc bydz może iego oznaczenie  $1 + 3 \times 2$ ; tak dalece, że każdy wyraz szeregu liczb nie parzystych, oznaczyć można przez sumę z jedności, i z różnicy następny 2, wzięty ieden raz mniej, niż wyraża liczba oznaczająca miejsce, które ten wyraz w szeregu zastępuje. I tak, dziesiąta liczba nieparzysta, będzie  $1 + 2 \times 9$ : dwudziesta  $1 + 2 \times 19$ : setna  $1 + 2 \times 99$ . Liczba *nta* nie parzysta  $1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$ , to jest każda liczba nieparzysta, zawsze będzie jednością mnieyszą od podwójny liczbę oznaczającej miejsce, które tamta liczba zastępuje w szeregu liczb nieparzystych.

*W ogólności*; niech będzie Ciąg Arytmetyczny, którego pierwszy wyraz *a*, różnica zaś następna dwóch wyrazów, niech będzie *d*.

W takowym Ciągu, będą wyrazy następujące:

2gi.	3si.	4ty.	5ty.	6ty.	7my.	8my.
$a+d$ .	$a+2d$ .	$a+3d$ .	$a+4d$ .	$a+5d$ .	$a+6d$ .	$a+7d$ .
9ty.	10ty.	20ty.	100ty.	<i>nty</i> .		
$a+8d$ .	$a+9d$ .	$a+19d$ .	$a+99d$ .	$a+d(n-1)$ .		

Oznaczenie to  $a+d(n-1)$  nazywa się *wyrazem ogólnym* (terminus generalis) ciągu. Położywszy zamiast *n*, w tém oznaczeniu ogólném ważności szczególné wyrazów; *np.* 10tego, 20tego, i t. d. będzie wyraz 10ty,  $a+9d$ : 20ty  $a+19d$ , i t. d.

Niech będzie 10 pierwszych liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10: zrózmy z nich 5 pár, tak aby jedna para składała się ze dwóch skrajnych wyrazów, inné zaś pary aby się składały ze dwóch wyrazów jednakowo odległych od skrajnych: summa każdéy z tych pár będzie jednakowá.

$$\text{to jest } 1 + 10 = 11.$$

$$2 + 9 = 11.$$

$$3 + 8 = 11.$$

$$4 + 7 = 11.$$

$$5 + 6 = 11.$$

Jakoż,

Jakoż, pierwszy *np* wyraz drugiéj pary przewyższa jednością pierwszy wyraz pierwszej pary: ale przeciwnie, drugi wyraz drugiej pary mniejszy jest jednością od drugiego wyrazu pierwszej pary. Pierwsze wyrazy 3ciej, 4tej, 5tej pary większe są względem pierwszego wyrazu pierwszej pary dwiema, trzema, czterema jednościami: ale przeciwnie drugie wyrazy tychże par mniejsze są tylż jednościami względem drugiego wyrazu téjże pierwszej pary. Wziąwszy tedy wyrazy pierwszej pary za skrajne; będzie można wziąć wyrazy każdej innej pary za średnie proporcji Arytmetycznej: a zatem summa każdej pary jest jednakową.

To rozumowanie przystosować się może do tylu par, ile zechcemy. Zawsze różnica pierwszego wyrazu którejkolwiek pary od wyrazu pierwszego pierwszej pary równa będzie różnicy drugiego wyrazu tamtéj pary od wyrazu drugiego pierwszej pary. I to się prawdzi na każdym ciągu Arytmetycznym.

Jakoż, niech w ciągu jakimkolwiek Arytmetycznym pierwszy wyraz będzie *a*, różnica następna dwóch wyrazów *d*, liczba tych wyrazów *n+1*; ostatni wyraz będzie *a+dn*.

2gie wyrazy od skrajnych, będą *a+d*, i *a+d(n-1)*.

3cie . . . . . *a+2d*, i *a+d(n-2)*.

4te . . . . . *a+3d*, i *a+d(n-3)*.

5te . . . . . *a+4d*, i *a+d(n-4)*.

...

...

*mte* . . . . . *a+d(m-1)*, i *a+d(n-(m-1))*.

Summa zaś każdej pary, będzie *2a+dn*.

Jeżeli liczba wyrazów Ciągu jest nieparzysta, tedy wyraz środkowy będzie średnim Arytmetycznym między dwoma skrajnymi: a zatem równy będzie połowie ich summy.

Té własności Ciągów Arytmetycznych służą osobliwie do wyznaczenia summy liczby podanej wyrazów następnych w tychże ciągach bez dodawania ciągłego tychże wyrazów.

*Przykład.* Summa 10 pierwszych liczb naturalnych równa się 5 paróm wyrazów. Summa zaś każdej pary jest 11: a zatem summa wszystkich 10 wyrazów będzie 5 razy 11, to jest 55.

Jeżeli liczba wyrazów jest nieparzysta, *np.* 15, tedy summa ich równa się 7 paróm liczb (z których par summa każdej jest 16,) i jeszcze liczbie środkowej to jest 8: która to liczba środkowa równa się połowie summy dwóch wyrazów skrajnych: a zatem summa tych 15 wyrazów będzie równa summie skrajnych to jest 16, wzięty raz 7 i pół, albo 120. *W ogół-*



IV ogólnosci, aby znaleźć sumę wyrazów  $n$ , liczb naturalnych, trzeba wziąć sumę  $n+1$ , pierwszego i ostatniego wyrazu, czyli dwóch skrajnych wyrazów, i trzeba ją rozmnóżyć przez połowę liczby wyrazów, toieści przez  $\frac{n}{2}$ .

Wieloczyn  $\frac{(n+1)n}{2}$ , albo  $\frac{nn+n}{2}$  wyrazi sumę szukaną.

Przykład. Niech będzie  $n=10$ . Summa  $\frac{(n+1)n}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$ .

$n=100 \dots \frac{(n+1)n}{2} = \frac{101 \times 100}{2} = 5050$ .

$n=1000 \dots \frac{(n+1)n}{2} = \frac{1001 \times 1000}{2} = 500500$ .

213. Liczby 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 ...,  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,

które wyrażają summy liczb naturalnych nazywają się *Trójkątami*, (Numeri Triangulares). Niechby był trójkąt taki równoboczny, i każdy bok jego podzielony na jednakową liczbę części równych. Przez punkta podziału boku jednego, i przez punkta podziału odpowiadające w drugich bokach tego trójkąta poprowadziwszy linie, które będą równo odległe względem jednego boku przez którego podział nieprzechodzą i wyłowimy sobie punkta iakoby położone na wżyskich punktach przecięciów, i na wżyskich punktach podziałów; o tych punktach tak ustawionych mówi się, iż ustawione są *trójkątnie*, (triangulariter) i liczba ich wyraża się przez sumę liczb naturalnych zaczynając od jedności; a wielość wyrazów czyli liczb oznaczają się przez liczbę punktów znajdujących się na jednym z boków trójkąta.

I tak na figurze ponieważ liczba punktów znajdujących się na jednym boku trójkąta jest 10; liczba wżyskich punktów na trójkącie położonych, będzie 55. Fig. 49.

W takowém ułożeniu punkt którykolwiek wzięty między bokami trójkąta jednakowo jest odległym od sześciu punktów iemu najbliższych: a zatem jest w środku sześciokąta foremnego, którego wierzchołki przez te 6 punktów są oznaczone: trzy zaś punkta najbliższe, z których dwa są w jednym rzędzie (równo-odległym od jednego boku) a trzeci punkt równo-odległy w rzędzie

Mm naj-

najbliższym, będą zastępować miejsce trzech wierzchołków trójkąta równobocznego.

Liczba trójkątna przewyższa połowę odpowiadający sobie liczby kwadratowej połowę pierwiastku; a zatem liczba trójkątna tym bardziej się przybliża do połowy kwadratu odpowiadającego; im będzie większa. Stosunek tedy, który zachodzi między dwiema liczbami trójkątnymi tym bliższy będzie stosunkowi kwadratów odpowiadających tymże liczbom, im te liczby trójkątne większe będą.

*Przykład.* Dziesiąta i dwudziesta liczba trójkątna jest 55, i 210, a stosunek ich jest równy stosunkowi 11 do 42: téy zaś ostatniéy liczbie brakuje  $\frac{1}{2}11$  iéy saméy, aby cztery razy zamykała w sobie liczbę pierwszą 11.]

Setna, i dwuchsetna liczba trójkątna jest 5050, i 20100: stosunek ich równa się stosunkowi 101 do 402: téy zaś ostatniéy lic b e brakuje tylko  $\frac{1}{2}101$  iéy saméy, aby była poczwórna pierwszéz 101.

A w ogólności, stosunek liczby trójkątnej  $n$ , do liczby trójkątnej  $2n$ , równa się stosunkowi  $(nn+n)$  do  $2n(2n+1)$ , to jest, stosunkowi  $n+1$ , do  $4n+2$ :

ta zaś ostatnia liczba  $4n+2$ , różni się tylko częścią  $\frac{1}{2n+1}$  siebie saméy, od liczby pierwszéz  $n+1$ , poczwórníe wziętéz.

Niech znowu będzie liczb niepárzytych ciąg.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . ,  $2n-1$ ; którego summę znaleźć trzeba.

Summa dwóch skrajnych jest . . . . .  $2n$ .

Liczba wyrazów . . . . .  $n$ .

A zatem liczba pár równych . . . . .  $\frac{1}{2}n$ .

Nakoniec summą całego ciągu jest wieloczyn ważności iednéy páry przez liczbę pár; to jest wieloczyn  $z 2n$  przez  $\frac{1}{2}n$ ; czyli  $nn$ .

Summy więc liczb niepárzytych zacząwszy od pierwszéz czynią odpowiadające im kwadraty.

Liczby niepárzytłé 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 it.d.

Ich summy . . . 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169 it.d.

Liczby, które ten ostatni Ciąg ukladają, są w saméy rzeczy kwadratami liczb naturalnych. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 it.d.

Tę własność liczb niepárzytych okazać można przez ułożenie punktów ustawionych kwadratowo tymże samym sposobem, iakéśmy uczynili względem zebrania w jedną summę liczb naturalnych (\*).

W ogól-

(\*) Jmé Pan LE SAGE przystósował użytecznie do gospodarstwa wiejskiego ułożé-

W ogólności, niechaby trzeba zebrać w jedną summę następujący Ciąg Arytmetyczny.

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d, a+7d, \dots, a+d(n-1).$

Summą z pierwszego i ostatniego wyrazu, jest  $2a+d(n-1).$

Liczba wyrazów jest  $n$ ; a zatem liczba par jednakowych co do summy będzie  $\frac{1}{2}n$ . Węc summa ciągu całego, będzie summą szczególną  $2a+d(n-1)$

wziętą razy  $\frac{1}{2}n$ : to jest, będzie ta summa  $an+d \times \frac{n(n-1)}{2}$

Albo tak: Summa szukani, składa się z pierwszego wyrazu  $a$ , wziętego tyle razy, ile jest wyrazów, (który to wieloczyn będzie  $an$ ) i z różnicy następnej  $d$ , wziętej tyle razy, ile oznaczają summa liczby  $n-1$ , pierwszych liczb

naturalnych: która to summa będzie  $\frac{n(n-1)}{2}$ ; a zatem summa całego ciągu

jest  $an+d \times \frac{n(n-1)}{2}$ .

Uwaga. W tém wszystkim, cokolwiek się wyżej mówiło, zawsze się brał Ciąg rosnący: gdyby zaś był Ciąg malejący, to jest, co raz maicy mniejsze wyrazy; tedy nie trzeba by przydawać, ale odejmować różnicę jednostajną  $d$ : czyli co na jedno wychodzi, trzeba by odmięniać w tém wszystkim, o czym się dotąd mówiło, znak dodawania poprzedzający różnicę  $d$ , na znak odejmowania.

Mm 2

Wyra-

nia trójkątne, i kwadratowe. Ponieważ korzenia krzewiów, np. drzew wyciągaia soki w około; jeżeli tedy wyznaczoną będzie obszerność miejsca potrzebną drzewu, lub innemu jakiemu krzewu do jego posadki, więcej tych krzewiów zmieści się w ziemi danej wielkości; (które wymiary są większe znacznie względem odległości dwóch stop blizkich) zachowując ułożenie trójkątne, a niżeli gdyby się trzymano ułożenia kwadratowego: a to w tym samym stosunku, w którym jest bok trójkąta równobocznego do jego wysokości: z przyczyny, że w tymże stosunku rzędy krzewiów będą bliższe podług pierwszego ułożenia, niż podług drugiego; lubo odległość krzewiów nabyliższych sobie przez to się nie odmięni.

Stosunek ten jest równy stosunkowi 2, do  $\sqrt{3}$ , albo prawie 8, do 7, a jeszcze bliższy 15, do 13.



Wyrażenie to  $an + d \times n \left( \frac{n-1}{2} \right)$ , które oznaczają ważność summy

ciągu jakiegokolwiek Arytmetycznego, nazywają się *wyrażeniem zbiernym*. (terminus summatorius) tego ciągu. W tym wyrażeniu położywszy zamiast  $n$ , jaką tylko zechcemy liczbę, będziemy mieli sumę tylu wyrazów tego ciągu, ile jedności zawierać w sobie będzie ta liczba położona zamiast  $n$ .

Jeżeli wyrażenie nąyogólniejsze weźmie na siebie kształty mniej ogólne podług szczególnych ważności, które damy pierwszemu wyrazowi  $a$ , i różnicy  $d$ . I tak niechby był do zebrania w jedną sumę ciąg liczb naturalnych.

W tym przypadku będzie  $a=1$ ,  $d=1$ , a wyrażenie poprzedzające weźmie ten kształt  $n + n \left( \frac{n-1}{2} \right) = n \times \left( 1 + \frac{n-1}{2} \right) = n \left( \frac{n+1}{2} \right) = \frac{nn+n}{2}$ .

Jeżeli  $a=1$ ,  $d=2$ , tedy ciąg do zebrania będzie ciągiem liczb nieparzystych, a wyrażenie poprzedzające nąyogólniejsze weźmie ten kształt  $n + 2 \times n \left( \frac{n-1}{2} \right) = n + (nn-n) = nn$ .

Zgadza się to zupełnie z tem, cośmy wyżej powiedzieli o summie tych dwóch ciągów w szczególności.

214. Zadanie 1. Ileż trzeba liczb naturalnych, aby uczyniły sumę 136.

Mianowanie. Liczba wyrazów-szukana . . . . .  $n$ .

Summa liczb  $n$  pierwszych naturalnych  $n \left( \frac{n+1}{2} \right)$ .

Warunek.  $n \left( \frac{n+1}{2} \right) = 136$ .

Przerabianie. (Rozmnożywszy obie strony równania przez 2)

$$n(n+1) = 272, \text{ czyli } nn+n=272.$$

(Rozmnoż: obie strony przez 4)  $4nn+4n=1088$ .

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszym wyrazie)

$$4nn+4n+1=1089.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadr: po obu stronach)

$$2n+1=33.$$

(Odiąwszy 1 po obu stronach)  $2n=32$ .

(Pódzieliwszy przez 2)  $n=16$ .

Rozwią-

*Rozwiązanie.*  $n = 16$ . Liczba wyrazów szukaną.

$$n \left( \frac{n+1}{2} \right) = \frac{16 \times 17}{2} = 8 \times 17 = 136.$$

*W ogólności.* Ileż trzeba liczb naturalnych, zaczynając od 1, aby uczyniły sumę daną  $f$ .

*Mianowanie.* Niech będzie  $n$ , liczba wyrazów szukaną.

$$\text{Summa tych wyrazów} \dots n \left( \frac{n+1}{2} \right).$$

*Warunek.*  $n \left( \frac{n+1}{2} \right) = f.$

*Przerób:*  $\frac{nn+n}{2} = f.$

(Rozmnożywszy obie strony przez 2)  $nn + n = 2f.$

(Rozmnożywszy obie strony przez 4)  $4nn + 4n = 8f.$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszej stronie)

$$4nn + 4n + 1 = 8f + 1.$$

(Wyciągnąwszy pierwiątek kwadr.)  $2n + 1 = \sqrt{8f + 1}.$

(Odiąwszy 1)  $2n = \sqrt{8f + 1} - 1.$

(Podzieliwszy przez 2)  $n = \frac{\sqrt{8f+1} - 1}{2}.$

*Rozwiązanie.*  $n = \frac{\sqrt{8f+1} - 1}{2}.$

*Przykład.* Niech będzie  $f = 55.$

$$n = \frac{\sqrt{440+1} - 1}{2} = \frac{\sqrt{441} - 1}{2} = \frac{21 - 1}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Niech będzie  $f = 171.$

$$n = \frac{\sqrt{1368+1} - 1}{2} = \frac{\sqrt{1369} - 1}{2} = \frac{37 - 1}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Aby  $n$ , znaczyło liczbę spółmierną, a zatem aby ważność jego, którą forma wyraża, odpowiadała na Zadanie; trzeba do tego, aby to wyrażenie  $8f + 1$  było kwadratem. Jeżeli zaś  $f$ , jest liczbą trójkątną, tedy  $8f + 1$  zawsze będzie kwadratem. Skąd wypada.

215. *Twierdzenie* Jeżeli liczbę iakąkolwiek trójkątną rozmnóżymy przez 8, a do wieloczynu tego dodamy 1, summa będzie kwadratem.

Jakoż, niech będzie liczba iakąkolwiek trójkątną  $\frac{nn+n}{2}$ ; wieloczyn téy liczby przez 8, rozmnóżonéy będzie  $4nn+4n$ : a dodawszy 1, będzie  $4nn+4n+1$ ; ta zaś ostatnią summa iest kwadratem z  $2n+1$

216. *W ogólności*. Mając dané trzy którekolwiek z tych czterech ilości; a, d, n, s, można z tego zbiérnego wyrazu ciągu Arytmetycznégo

$f = an + d \left( \frac{n(n-1)}{2} \right)$  wyznaczyć czwartą ilość.

$$1. f = an + d \left( \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

$$2. \text{(Odiąwszy } d \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) \text{ po obu stronach, będzie)}$$

$$an = f - d \left( \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

(Podzieliwszy przez n, będzie)

$$a = \frac{f}{n} - d \times \frac{n-1}{2}.$$

3. (Odiąwszy an, po obu stronach w 1wszym równaniu)

$$f - an = d \left( \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

(Rozmnóż: przez 2)  $2f - 2an = d \times n(n-1).$

(Podzieliwszy przez  $n(n-1)$ )  $d = \frac{2f - 2an}{n(n-1)}.$

4. (Wykonawszy oznaczone rozmnóżenia w piérwším równaniu, będzie)

$$\frac{dnn-dn}{2} + an = f.$$

(Rozmnóżywszy przez 2)  $dnn-dn+2an=2f.$

(Rozmnóżywszy przez 4d, dla uchronienia się ułómków)

$$4ddn - 4ddn + 8adn = 8df.$$

albo



albo  $4ddn + 4dn(2a-d) = 8df.$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszymi stronie)

$$4ddn + 4dn(2a-d) + (2a-d)^2 = 8df + (2a-d)^2.$$

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$2dn + (2a-d) = \sqrt{8df + (2a-d)^2}.$$

(Odiąwszy  $2a-d$  po obu stronach)

$$2dn = \sqrt{8df + (2a-d)^2} - (2a-d).$$

(Nakoniec podzieliwszy przez  $2d$ )

$$n = \frac{\sqrt{8df + (2a-d)^2} - (2a-d)}{2d}.$$

217. Zadanie 2. Dwie osoby wyjeżdżają razem na przeciwko siebie: jedna z nich przed spotkaniem się ujeżdżała na dzień po mil 10, druga zaś pierwszego dnia ujechała mil 5, drugiego mil 6, i t. d. milą co dzień więcej ujeżdżając. Gdy się z sobą te osoby spotykają, tyle jedna z nich ujechała, co i druga.

Dni jazdy, tak jednę, jak i drugie osoby . . .  $x$ .

Mile które pierwszą z nich ujechała . . .  $10x$ .

Mile które ujechała druga

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \dots + 5 + (x-1) = \left(\frac{9+x}{2}\right)x.$$

Warunek.  $\left(\frac{x+9}{2}\right)x = 10x.$

Przerób: (Podzieliwszy obie strony przez  $x$ )  $\frac{x+9}{2} = 10.$

(Rozmnożywszy przez 2)  $x + 9 = 20.$

(Odiąwszy 9)  $x = 11.$

Rozwiązanie.  $x = 11$ . Liczba szukana dni jazdy.

$$10x = 110. \text{ Droga przez pierwszą osobę ujechaną.}$$

$$\left(\frac{x+9}{2}\right) = 110. \text{ Droga przez drugą osobę ujechaną.}$$

Inszé przykłady. Pierwszą osobą ujeżdża raz wraz po 8 mil na dzień. Drugą osobą ujeżdża 6 mil pierwszego dnia, a innych dni następnych, co raz milą więcej

Pierwszą ujeżdża raz wraz po 9 mil na dzień. Drugą ujeżdża 7 mil pierwszego dnia, a innych dni następnych co raz milą więcej.

218. Zadanie 3. Dwie osoby odległe na mil 164, iadą naprzeciwko siebie. Jedna z nich wieżdza co dzień po 10 mil, druga wieżdza 7 mil pierwszego dnia, każdego zaś potem dnia następnego co rás więcej 1 milą wieżdza. Kiedyż się zjadą.

Mian: Dni iazdy tych dwóch osób . . . . .  $x$ .

Droga przez 1 wszą wiechaną . . . . .  $10x$ .

Droga przez 2 gą wiechaną  $7+8+9+10 \dots 7+(x-1) = \left(\frac{13+x}{2}\right) x$ .

Droga przez obie osoby wiechaną . . . . .  $10x + \left(\frac{13+x}{2}\right) x$ .

Warunek.  $10x + \left(\frac{13+x}{2}\right) x = 164$ .

Przerób: (Rozmnoż: przez 2)  $20x + 13x + xx = 328$ .  
albo  $xx + 33x = 328$ .

(Rozmni: przez 4 dla uchronienia się ułómków)  $4xx + 132x = 1312$ .

(Dopelniwszy kw: w 1 wśzý stronie przez dodanie kwadratu z 33)

$$4xx + 132x + 1089 = 2401.$$

(Wyciąg: piérw: kwadr:) . . .  $2x + 33 = 49$ .

(Odiąwszy 33) . . . . .  $2x = 16$ .

(Podzieliwszy przez 2) . . . . .  $x = 8$ .

Rozwiązanié.  $x = 8$ . Dni drogi szukane.

$10x = 80$ . Droga wiechaną przez piérwszą osobę.

$x \times \left(\frac{13+x}{2}\right) = 84$ . Droga wiechaną przez 2 gą.

Spráwdzenié.  $10x + \left(\frac{13+x}{2}\right) x = 80 + 84 = 164$ . tak iak bydz powinno.

Inszé przykłady. Odległość dwóch osób iest 168 mil: piérwsza wieżdza 9 mil na dzień, druga 5 mil dnia piérwszego, a innych dni następnych co rás po dwie mile więctý.

Pewná osoba má dochodu roczného 100 Cz: Zł. Zamiéřtaby go miała łożyć na iakié wydatki, daie na procent  $5\frac{1}{2}$  za każdą razą za którą go oabiera: i tak przymusza co rok procentów, lubo inż od nich nie bierze znowu procentu. Za iléž lat przydzie ta osoba do kapitału 125 Cz: Zł.

To ostatnié Zadanié nie różni się prawie od poprzedzającego.

Niech

Niech będzie  $x$ , liczba szukana lat.

Ta osoba odbierze dochód 100 Cz: Zł: razy  $x$ ; odbierze więc  $100x$ .

Dochód odebrany na końcu pierwszego roku przynosi procént przez lat

$x - 1$ .

Dochód odebrany na końcu drugiego roku przynosi procént przez lat  $x - 2$ ; i tak aż do ostatniego dochodu, który już procéntu nie przynosi.

A że procént od 100 Cz: Zł: jest 5 Cz: Zł: więc osoba ta weźmie ze wszystkiém procéntu 5 Cz: Zł. tyle razy rozmnożonych, ile oznaczy summa liczb pierwszych

naturalnych, których powinno być  $x - 1$ ; ta zaś summa będzie  $x \left( \frac{x-1}{2} \right)$

*Warunek.*  $100x + 5 \times x \left( \frac{x-1}{2} \right) = 1225.$

*Przerób:* (Podzieliwszy obie strony przez 5)

$$20x + x \left( \frac{x-1}{2} \right) = 245.$$

(Rozmnożywszy przez 2)  $40x + xx - x = 490.$

$$\text{albo } xx + 39x = 490.$$

(Rozmnożywszy przez 4)  $4xx + 156x = 1960.$

(Dopełniwszy kwadr: w pierwszy stronie przez dodanie kwadratu z 39)  $4xx + 156x + 1521 = 3481.$

(Wyciągnąwszy pierwi kwadr:.)  $2x + 39 = 59.$

(Odiąwszy 39)  $2x = 20.$

(Podzieliwszy przez 2)  $x = 10.$

Ta osoba odebrała więc dochodu 1000 Cz: Zł: a summa procéntów będzie 5 Cz: Zł: rozmnożonych przez summę dziewięciu pierwszych liczb naturalnych, to jest przez 45: będzie więc  $5 \times 45 = 225.$

A zatem za 10 lat ta osoba przydzie do kapitału 1225 Cz: Zł.

*Insze przykłady* Dochód jest 300 Cz: Zł: procént 6%, którego corocznie przybywa tak, jak wyżej. Za ileż lat osoba na zysk swój dochód ten obracać, nieć będzie 2904 Cz: Zł?

Dochód jest 400 Cz: Zł: Procént 7%. Za ileż lat osoba zbierając ten dochód przydzie do 6648 Cz: Zł.

219. Zadanie 4 Winiętnu komu summe 1, którą terdź zaradź mam zapłacić. Godzę się z wierzycielem, iż mi tę summę częściami równemi na iedenácie

Na

rát



rát rocznych wypłacać sobie pozwól, odbierając natychmiast odemnie jedną ratę. Ilż mam na każdą ratę wypłacać, abym po ostatniej raty wypłaconiu mój dług zgładził, rachując procent po 5%?

Gdybym teraz zaraz wypłacił sumę  $f$ , którą winięu, tedy ponie-  
wáž procent od téj summy na rok jest  $\frac{1}{20}$  téjże summy, więc za 10 lat ten  
procent byłby  $\frac{1}{20} f$ , albo  $\frac{1}{2} f$ . A zatem osoba, której dłużny jestem, miała-  
by w takowy sposób za 10 lat  $f + \frac{1}{2} f = \frac{3}{2} f$ .

*Mianowanie.* Niech  $x$ , oznacza ratę, którą corocznie wypłacać po-  
winiénem.

Summa tych wszystkich 11 rat będzie . . . . .  $11x$ .

1wsza rata przynosi procent przez 10 lat, to jest  $\frac{1}{20} x \times 10$ .

2ga . . . . . 9 . . . . .  $\frac{1}{20} x \times 9$ .

3cia . . . . . 8 . . . . .  $\frac{1}{20} x \times 8$ .

4ta . . . . . 7 . . . . .  $\frac{1}{20} x \times 7$ .

. . . . .

. . . . .

10ta . . . . . 1 . . . . .  $\frac{1}{20} x \times 1$ .

A zatem summa wszystkich procentów będzie  $\frac{1}{20} x$ , rozmnożoną przez  
sumę 10 pierwszych liczb naturalnych: która to summa jest 55: więc bę-  
dzie  $\frac{55}{20} x = \frac{11}{4} x$ .

*Warunek.*  $11x + \frac{11}{4} x = \frac{3}{2} f$ .

*Przerób:* (Obróciwszy całą pierwszą stronę na ułómki)  $\frac{55}{4} x = \frac{3}{2} f$ .

(Przywiódłszy obie strony do jednakowego mianownika, i  
opuściwszy go)  $55x = 6f$ .

(Podzieliwszy przez 55)  $1x = \frac{6}{55} f$ .

*Rozwiązanie.*  $x = \frac{6}{55} f$ . Wążność każdej raty roczney.

$11x = \frac{6}{5} f$ . Wążność wszystkich rat rocznych.

$\frac{11}{4} x = \frac{3}{20} f$ . Summa procentów od wszystkich rát ro-  
cznych.

$11x + \frac{11}{4} x = \frac{6}{5} f + \frac{3}{20} f = \frac{27}{20} f = \frac{3}{2} f$ . Wążność wszystkich  
rát wraz z procentami.

*Przykłady:* Niech będzie  $f = 5500$ . będzie  $x = 600$ .

$f = 4400$ . będzie  $x = 480$ .

Niechby znówu procent był 6%, liczba lat 8, a  $f = 24200$ .

*Uwaga.*

*Uwaga.* Gdyby dług cały wypłacić razem przypadało w pewnym czasie, np. za lat 10; tedy z tym długiem zrównałibyśmy ważność summy rat rocznych i ich procéntów, któreby na końcu tychże lat wyznaczonych przypadały.

220. *Zadanie 5.* Mám komu wypłacić corocznie pewną sumnę  $a$ , przez lat 11, rachując od teraźniejszego czasu. Chcę się od razu pozbyć tego długu. Jakąż więc sumnę przyjdzie mi natychmiast wypłacić, rachując procént 5%.

Dowiedzie się tak, jak wyżej, że ważność 11 rat, będzie . . . . .  
 $11a + \frac{1}{20}a(1+2+3+\dots+10) = 11a + \frac{5}{20}a = 11a(1+\frac{1}{4}) = 11a \times \frac{5}{4} = \frac{55}{4}a.$

*Mianownik.* Niech  $x$  oznacza sumnę, którą mi zaraz wypłacić przypada, abyin się całego długu pozbył.

Procént roczny od téj summy będzie  $\frac{1}{20}x$ , a zatem przez lat 10, będzie téż procént  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x.$

*Warunek.*  $x + \frac{1}{2}x = \frac{55}{4}a.$

*Przerób:* (Obróciwszy całą rwszą stronę na ułómki)  $\frac{3}{2}x = \frac{55}{4}a.$   
 (Przywiódłszy dwie strony do iednakowego mianownika, i opuściwszy go)  $6x = 55a.$   
 (Podzieliwszy przez 6)  $x = \frac{55}{6}a.$

*Rozwiązanie.*  $x = \frac{55}{6}a.$  Summa szukana.

Procént roczny od téj summy . . . . .  $\frac{55}{6}a \times \frac{1}{20} = \frac{11}{24}a.$

Procént 10letni, od téż summy . . . . .  $\frac{11}{24}a.$

Ważność całej summy na końcu 10 lat . . . . .  $\frac{55}{6}a + \frac{11}{24}a =$   
 $55a(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}) = 55a(\frac{2}{24} + \frac{1}{24}) = 55a \times \frac{3}{24} = 55a \times \frac{1}{4} = \frac{55}{4}a.$  I ta to jest summa całego długu wraz z procéntem.

*Przykłady.* Niech będzie  $a=120$ ; . . . . .  $a=144.$

będzie  $f=55 \times 10=1100$ ; { będzie  $f=1320.$

Niechby znowu była liczba lat 12, 15, 18, 20, a procént 6, 7, i t. d. od sta.

*Uwaga.* Téj sposób rachowania ważności teraźniejszégó długu, który przez przeciąg pewnéj liczby lat ratami miał być wypłacany nie jest zupełnie dokładnym, iako to obaczymy w Rozdziele następującym. Gdy jednak liczba lat jest mała; wtedy nieznacznie bardzo będzie uchybienie.

221. *Zadanie 6.* Pewna osoba, która by mogła corocznie pożytkować z swégó majątku po 4%, dała go innéj osobie bez obowiązku nazad go powró-

czenia, byleby corocznie odbierała od niej 10%; i ten procent 10% roczny, dać znowu potem na procent 4%, nie rachując procentu od procentu. Za ileż lat zbierze jeszcze sam majątek, któryby była zebrała, dając swój pierwotny majątek, na procent 4%?

Niech ten procent 10%, albo raczéj pensya roczná umówioná, będzie  $f$ , będzie kapitał cały, z którego ta pensya má bydź wypłacaná 10f.

**Mianowanie.** Niech będzie  $x$ , liczba szukaná lát.

Kapitał téj osoby, gdyby go była dała na procent 4%, byłby powiększony sumą  $\frac{1}{25} 10f$ , albo  $\frac{2}{5}f$  wziętą tyle razy, ileby było lát, przez któreby ten procent wypłacano: a zatem na końcu lát  $x$ , ten kapitał byłby  $10f + \frac{2}{5}fx$ .

Ta osoba odbierze swoję pensyą  $f$ , razy  $x$ , więc z tego zbioru, będzie miała naostatek  $fx$ .

Pensya odebraná na końcu pierwszego roku przyniesie procent przez lát

Na końcu 2go roku

3go roku

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

A że procent roczny od téj pensyi jest  $\frac{1}{25}f$ ; więc procent od wszystkich tych pensy będzie

$$\frac{1}{25}f(1+2+3+4+5 \dots x-1) = \frac{1}{25}f \left( \frac{(x-1)x}{2} \right)$$

**Warunek.**  $fx + \frac{1}{25}f \left( \frac{(x-1)x}{2} \right) = 10f + \frac{2}{5}fx$

**Przerób:** (Podzieliwszy obie strony przez  $f$ )

$$x + \frac{(x-1)x}{50} = 10 + \frac{2}{5}x$$

(Rozmnożywszy obie strony przez 50)

$$50x + (x-1)x = 500 + 20x \text{ albo } 30x + 49x = 500 + 20x$$

(Odiąwszy  $20x$  po obu stronach)  $xx + 29x = 500$

(Rozmnożywszy obie strony przez 4)  $4xx + 116x = 2000$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszym wyrazie, przez dodanie z obu stron kwadratu z 29)  $4xx + 116x + 841 = 2841$

(Wy-



(Wyciąg: pierwiast: kwadr:)  $2x + 29 = \sqrt{2841} = 53,3+$ .

(Odiąwszy 29)  $2x = 24,3+$ .

(Podzieliwszy przez 2)  $x = 12,15,$  + to jest 12 lat, i ma-  
ło co mniej od 2 miesięcy.

**Przykt:** Niech będzie pensya roczna . . . 1200 Zł.

a zatem kapitał . . . 12000 Zł.

Procent 4% na rok od 12000 Zł. jest . . . 480 Zł.

Tenże procent za lat 12, i 2 miesiące . . . 5840.

Więc kapitał za lat 12 i 2 miesiące byłby . . . 17840.

Ta osoba wzięła by za lat 12, Zł. 1200; razy 12, to jest 14400.

Procent roczny od pensyi 1200 Zł. byłby . . . 48.

Summa wszystkich następnych pensyi jest 48 (1+2+3+ . . . 11) =

$$48 \times 11 \times 12$$

2

$$= 3168.$$

Summa wszystkich pensyi i procentów za lat 12, 17568 Zł.

Procent 2 miesięcy od 14000 Zł. . . . . 109.

Część 13tej pensyi, należący się za 2 miesiące . . . 200.

Summa . . . . . 17877.

Ta ostatnia summa, mało co się różni od ważności wyżej znalezionej,  
do której byłby urośl kapitał w przeciągu tegoż samego czasu.

Inszé przykłady. Pensya roczna wypłacana z kapitału jest 10%. Osoba  
w ten sposób pożyczająca z kapitału mogłaby była obrócić go na procent 5%, tak,  
jak w samej rzeczy obrócić na tenże procent pensye swoje następne.

Niechby znów roczna pensya była 12%. Niech pensye następne obrócone bę-  
dą na procent 5%, sam zaś kapitał mógł być obróconym na procent 4%.

222. Zadanie 7. Pewna osoba mała 100000 Zł. w dobrach, które iły  
czynią tylko 4000 Zł. przypożycza na początku każdego roku na różne wydatki  
po 6000 Zł. od których obowiąznie się płacić procentu 10%. Nie wypłaca ani ka-  
pitału, ani procentu co rok się pomnażającego (nie będąc wszelako obowiązana pła-  
cić procent od procentu.) Za ileż lat ta osoba wcale się zniszczy?

**Mianowanie.** Niech liczba szukana lat, będzie . . . x.

Przypadnie téj osobie pożyczyc 6000

Zł. razy x, to jest . . . 6000x.

Procent roczny od 6000 Zł. jest 600 Zł.

1wsze, 2gie, 3cie, 4te . . . . . xte pożyczenie Zł.

6000, ciągnie za

sobą procent przez . . . x, x-1, x-2, x-3 . . . . . i lat.

A zatem summa długów téj osoby na końcu lat  $x$ , mając wzgląd na fame procenta,

$$\text{będzie } 600(1+2+3+4+\dots+x) = 600 \left( \frac{x(x+1)}{2} \right).$$

$$\text{A cały téj dług będzie } 6000x + 600 \left( \frac{x(x+1)}{2} \right)$$

$$\text{Warunek. } 6000x + 600 \left( \frac{x(x+1)}{2} \right) = 100000.$$

$$\text{Przerób: (Rozmn: obie strony przez 2)} \quad 12000x + 600xx + 600x = 200000.$$

$$\text{albo } 600xx + 12600x = 200000.$$

$$(\text{Podziel: obie strony przez 200}) \quad 3xx + 63x = 1000.$$

$$(\text{Rozmn: przez 12 dla uchronienia się ułomków})$$

$$36xx + 756x = 12000.$$

$$(\text{Dopełn: kwadratu w 1 wszyéj stronie, przez dodanie } 63^2 \text{ po obu stronach}) \quad 36xx + 756x + 3969 = 15969.$$

$$(\text{Wyciąg: pierwiast: kwadr:}) \quad 6x + 63 = \sqrt{15969} = 126, 36.$$

$$(\text{Odzawizy } 63) \quad 6x = 63, 36.$$

$$(\text{Podzieliwszy przez 6}) \quad ix = 10, 56, \text{ toieft lat } 10, \text{ i trochę więcéy niż pół siódma miesiąca.}$$

$$\text{Summa pożyczek przez 10 lat} \quad 60000 \text{ Zł.}$$

Summa procéntów od tychże pożyczek, iest

$$600(1+2+3+\dots+10) = 600 \times 55 = 33000 \text{ Zł.}$$

$$\text{Procént od } 60000 \text{ Zł. za 6 miesięcy} \quad 3000.$$

$$\text{Pożyczyła iezcze ta osoba na 6 miesięcy} \quad 3000.$$

$$\text{Procént od téj ostatniéy pożyczki} \quad 150.$$

Będą więc długi do dodania

$$\left\{ \begin{array}{l} 60000 \text{ Zł.} \\ 33000. \\ 3000. \\ 3000. \\ 150. \\ \hline 99150. \end{array} \right. \text{ Dług na końcu 10 lat i 6 miesięcy.}$$

Procént od 60000 Zł. za 7 miesięcy . . . . .	3500. Zł.
Dług 7 miesięcy . . . . .	3500.
Procént od tego ostatniego długu . . . . .	204.
Wartość ro pierwszych pożyczek, wraz z procentem od nich . . . . .	93000.

Dług cały na końcu lat 10, i 7 miesięcy . . . 100204.

Inszé przykłady. Maiątek téj osoby, iest 150000 Zł: z którego má 7000 Zł: roczného dochodu, wydaie zaś ta osoba co rok Zł: 12000, i zapożyczyć się po 10%.

Maiątek téj osoby iest 200000 Zł. z których má 9000 złotych dochodu. Wydatek iéy roczny iest 16000 Zł. i zapożyczyć się po 12%.

Przyśfóswanie zbioru w jednę sumnę ciągów Arytmetycznych do zbioru liczb trójkątnych, i liczb kwadratowych.

223. Liczby trójkątne,

$$1\text{wła} = 1 = 1.$$

$$2\text{gá} = 3 = 1 + 2.$$

$$3\text{ciá} = 6 = 1 + 2 + 3.$$

$$4\text{tá} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4.$$

$$5\text{tá} = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

$$6\text{tá} = 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.$$

$$7\text{má} = 28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

$$8\text{má} = 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

⋮

$$n\text{tá} = \frac{n \times (n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \dots n.$$

$$\begin{aligned} S. (\text{Summa szukaná}) &= 1 \times n + 2(n-1) + 3(n-2) + 4(n-3) + 5(n-4) + 6(n-5) \\ &\quad + 7(n-6) + 8(n-7) + \dots n \times 1. \\ &= 1 \times n + 2(n-1) + 3(n-2) + 4(n-3) + 5(n-4) + 6(n-5) \\ &\quad + 7(n-6) + 8(n-7) + \dots n(n-(n-1)). \\ &= n(1+2+3+4+5+6+7+8+\dots n) \\ &\quad - (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 5 \times 6 + 6 \times 7 + 7 \times 8 + \dots (n-1)n) \end{aligned}$$

Ostatni szereg wyráżający sumnę szukaną, ikládá się ze dwóch, z których w pierwszym rest  $n$ , rozmnożoné przez sumnę liczb  $n$  pierwszych naturalnych, albo przez  $n\text{tá}$  liczbę trójkątną. W drugim zaś z tych szeregu każdy wy-



raz jest podwójnym liczby trójkątnej, zaczawszy od pierwszej, a kończąc na przedostatniej. Summa więc drugiego tego szeregu będzie podwójną summy szukaney zmniejszonej  $n$ ą, to jest ostatnią liczbą trójkątną: a zatem wypadnie następujące równanie wyrażające sumę całego szeregu liczb trójkątnych.

$$f = n \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) - 2 \left( f - \frac{n(n+1)}{2} \right).$$

$$\text{albo } f = \frac{n \times n(n+1)}{2} - 2f + 2n \left( \frac{n+1}{2} \right).$$

(Dodawszy  $2f$  do obu stron, będzie)

$$3f = \frac{n \times n(n+1)}{2} + \frac{2n(n+1)}{2} \\ = \frac{n \times (n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 3, będzie)

$$f = \frac{n \times (n+1) \cdot (n+2)}{1 \times 2 \times 3}.$$

Aby więc znaleźć sumę liczby podanej liczb trójkątnych, zaczawszy od pierwszej; trzeba zrobić wieloczyn ciągły ze trzech liczb naturalnych następnych, z których pierwszą oznaczalaby liczbę wyrazów tego ciągu liczb trójkątnych, i wziąć szóstą część tego wieloczynu.

$$\text{Przykład. Dajmy że } n=5, \text{ będzie } \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 35.$$

$$\text{Dajmy że } n=10, \text{ będzie } \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3} = 220.$$

*Przystósowanie.* Niechby kul' ustawione były w ostrográn trójkątny, którego bok podstawy jest  $n$ ; liczba kul, z których się ten ostrográn składa,

$$\text{będzie } \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3}.$$

224. Liczby kwadratowe.

$$1\text{w}^{\text{sz}}\text{a} = 1 = 1.$$

$$2\text{g}^{\text{a}} = 4 = 1 + 3.$$

$$3\text{ci}^{\text{a}} = 9 = 1 + 3 + 5.$$

$$4\text{t}^{\text{a}} = 16 = 1 + 3 + 5 + 7.$$

$$5\text{t}^{\text{a}} = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$$

$$6\text{t}^{\text{a}} = 36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$$

$$7\text{m}^{\text{a}} = 49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13.$$

$$8\text{m}^{\text{a}} = 64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15.$$

...

$$n\text{t}^{\text{a}} = nn = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \dots + 2n-1.$$

$$\begin{aligned} f. (\text{Summa szukaná}) &= 1. n + 3(n-1) + 5(n-2) + 7(n-3) + 9(n-4) + \\ &+ 11(n-5) + 13(n-6) + 15(n-7) + \dots + (2n-1)(n-(n-1)). \\ &= n(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \dots + 2n-1) \\ &- (1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + 4 \times 9 + 5 \times 11 + 6 \times 13 + 7 \times 15 + \dots + (n-1)(2n-1)). \end{aligned}$$

Ostatni szereg wyrażający sumę szukaną ciągu liczb kwadratowych składa się ze dwóch, z których pierwszy równa się *nt* liczb kwadratowych wziętych razy *n*. W drugim zaś szeregu każdy wyraz składa się z podwójnej liczby kwadratowej, i z liczby naturalnej odpowiadającej w porządku wyrazów, zaczynając od pierwszej, a kończąc na przedostatniej. Będzie więc summa drugiego szeregu równa summie dwóch następujących szeregów.

$$\begin{aligned} &2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + \dots + (n-1)^2). \\ &+ (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + n-1) = \frac{(n-1)n}{2}. \end{aligned}$$

a zatem summa całego szeregu liczb kwadratowych będzie

$$f = n \times nn - 2(f - nn) - \frac{(n-1)n}{2}.$$

$$\text{albo } f = n \times nn - 2f + 2nn - \frac{(n-1)n}{2}.$$

(Dodawszy 2f, po obu stronach, będzie)

$$3f = n \times nn + 2nn - \frac{(n-1)n}{2}.$$

$$= n \left( nn + 2n - \frac{n-1}{2} \right).$$

$$= \frac{n(2nn + 3n + 1)}{2}.$$

$$= n \left( \frac{(n+1)(2n+1)}{2} \right).$$

Podziel obie strony przez 3.

$$f = \frac{n \times n + 1 \times 2n + 1}{1 \times 2 \times 3}.$$

*Przystosowanie.* Niechby kule ułożone były w ostrogród kwadratowy, którego bok podstawy jest  $n$ ; liczba kul zawartych w tym ostrogranie, będzie

$$1 \times 2 \times 3$$

*Przykłady.* Dajmy że  $n = 10$ .

będzie  $\frac{n \times n + 1 \times 2n + 1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{10 \times 11 \times 21}{1 \times 2 \times 3} = 5 \times 11 \times 7 = 385.$

Dajmy że  $n = 15$ .

będzie  $\frac{n \times n + 1 \times 2n + 1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{15 \times 16 \times 31}{1 \times 2 \times 3} = 5 \times 8 \times 31 = 1240.$

225. Zbiór kwadratów z wyrazów iakiegokolwiek ciągu Arytmetycznego można przywieść do zbioru poprzedzającego.

*Ciąg Arytmetyczny.*

$$a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad a+4d \quad a+(n-1)d.$$

*Kwadraty.*

$$aa, aa+2ad+dd, aa+4ad+4dd, aa+6ad+9dd, aa+8ad+16dd, aa+2ad(n-1)+dd(n-1)^2.$$

Summa tego ciągu kwadratów składa się

1. Z kwadratu i wżęgo wyrazu  $aa$ , tyle razy wziętego, ile jest wyrazów.
2. Z podwóynęgo wieloczynu  $2ad$ , rozmnożonego przez sumnę liczb naturalnych  $(1+2+3+4+5+6+\dots+(n-1)).$

3. Z kwa.



3. Z kwadratu różnicy  $dd$ , rozmnożony przez sumę liczb kwadratowych  $(1+4+9+16+25+36+\dots+(n-1)^2)$ .

Węc summa tego ciągu, jest

$$aan + 2ad \frac{(n \times n - 1)}{1 \times 2} + dd \left( \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \times 2 \times 3} \right).$$

226. W wyrażeniu tej summy można wprowadzić tam tylko kwadrat różnicy następny wyrazów bez wieloczynu ię przez pierwszy wyraz, a to w następujący sposób:

1. Niech liczba wyrazów ciągu, będzie nieparzystą, i oznaczoną przez  $2n+1$ .

Oznaczwszy wyraz średni przez  $a$ , wyrazy dwa, między którymi ten wyraz średni znajduje się, oznaczmy przez  $a+d$ , i  $a-d$ .

Zaczawszy od wyrazu średniego, rozłożmy ciąg na dwa następujące:

$$a. \quad \begin{array}{ccccccccc} a+d. & a+2d. & a+3d. & a+4d. & a+5d. & a+6d. & \dots & a+nd. \\ a-d. & a-2d. & a-3d. & a-4d. & a-5d. & a-6d. & \dots & a-nd. \end{array}$$

Kwadraty.

$$\begin{array}{l} aa + 2ad + dd. aa + 4ad + 4dd. aa + 6ad + 9dd. aa + 8ad + 16dd. \dots aa + 2and + n^2 dd. \\ aa - 2ad + dd. aa - 4ad + 4dd. aa - 6ad + 9dd. aa - 8ad + 16dd. \dots aa - 2and + n^2 dd. \end{array}$$

W każdej parze kwadratów, podwójne wieloczyny niszczą się, i zostaje

$$aa(2n+1) + 2dd(1+4+9+16+\dots+n^2) = aa(2n+1) + 2dd \left( \frac{n \times n + 1 \times 2n + 1}{1 \times 2 \times 3} \right).$$

2. Niech liczba wyrazów ciągu będzie parzystą, i oznaczoną przez  $2n$ .

Oznaczmy wyrazy dwa średnie przez  $a+d$ , i  $a-d$ .

Ciąg Arytmetyczny będzie mógł być rozłożonym, na dwa następujące:

$$\begin{array}{ccccccccc} a+d. & a+3d. & a+5d. & a+7d. & a+9d. & a+11d. & \dots & a+(2n-1)d. \\ a-d. & a-3d. & a-5d. & a-7d. & a-9d. & a-11d. & \dots & a-(2n-1)d. \end{array}$$

Kwadraty

$$\begin{array}{l} aa + 2ad + dd. aa + 6ad + 9dd. aa + 10ad + 25dd. aa + 14ad + 49dd. \dots aa + 2ad(2n-1) + (2n-1)^2 dd \\ aa - 2ad + dd. aa - 6ad + 9dd. aa - 10ad + 25dd. aa - 14ad + 49dd. \dots aa - 2ad(2n-1) + (2n-1)^2 dd \end{array}$$

Summa tych kwadratów.

$$2aa(n) + 2dd(1+9+25+49+\dots+(2n-1)^2).$$

Aby znaleźć sumę kwadratów tych liczb  $n$ , nieparzystych

$$(1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1).$$

Od summy kwadratów liczb pierwszych  $2n-1$  naturalnych: 1, 2,

$$3, 4, 5, 6, 7, \dots, 2n-1, \text{ która jest } \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1 \times 2 \times 3}$$

odjąć potrzeba sumę kwadratów liczb pierwszych  $2n-1$  parzystych;  
 $2(1+2+3+4+5+6 \dots n-1)$ ; która jest  $4 \left( \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \times 2 \times 3} \right)$

Zostanie  $(2n-1)2n \left( \frac{4n-1}{1 \times 2 \times 3} - 2 \left( \frac{(n-1)}{1 \times 2 \times 3} \right) \right) = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1 \times 2 \times 3}$ .

Więc naostatek dojdziemy summy szukaney, i ta będzie

$$2aa \times n + 2dd \left( \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1 \times 2 \times 3} \right).$$

227. Przykłady do przystosowania.

1. Znaleźć 9 liczb w ciągu Arytmetycznym, których summa 99, a summa ich kwadratów 1329.

Wyraz średni, będzie  $\frac{9}{2}$  częścią 99, to jest 11.

Wzór ogólny.  $aa(2n+1) + 2dd \left( \frac{n \times n + 1 \times 2n + 1}{1 \times 2 \times 3} \right)$  zamieni się

na ten szczególny  $121 \times 9 + 2dd \left( \frac{4 \times 5 \times 9}{1 \times 2 \times 3} \right).$

Więc  $121 \times 9 + 2dd \left( \frac{4 \times 5 \times 9}{1 \times 2 \times 3} \right) = 1089 + 60dd.$

a zatem;  $1089 + 60dd = 1329.$

Odiawszy 1089 po obu stronach, będzie  $60dd = 240.$

Podzieliwszy obie strony, przez 60, będzie  $dd = 4.$

Wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy, będzie  $d = 2.$

Ciąg tedy, zacząwszy od wyrazu średniego, będzie

$$11, 9, 7, 5, 3, 1, 13, 15, 17, 19.$$

2. Znaleźć 10 liczb w ciągu Arytmetycznym, których summa 110, a summa ich kwadratów 1540.

Summa tych wyrazów par 5, jest 110, a zatem summa każdej pary będzie 22, więc  $a = 11.$

Wzór

Wzór ogólny,  $2aa \times n + 2dd \left( \frac{(2n-1) \cdot (2n) \cdot (2n+1)}{1 \times 2 \times 3} \right)$  (położywszy

11, zamiast  $a$ , 5, zamiast  $n$ ;) zamieni się na ten szczególny:

$$121 \times 10 + 2dd \left( \frac{9 \times 10 \times 11}{1 \times 2 \times 3} \right) = 121 \times 10 + 2dd \times 165.$$

Więc  $1210 + 330dd = 1540$ ;

a zatem  $121 + 33dd = 154$ .

Więc  $33dd = 33$ ,  $dd = 1$ .

$d = 1$ .

Wyrazy dwa średnie:  $12$ ; Ciąg  $10, 8, 6, 4, 2$ .  
 $10$ ;  $12, 14, 16, 18, 20$ .

## ROZDZIAŁ VIII.

O ciągach Jeometrycznych, i o Logarytmach.

228. **G**dy będzie szereg takich ilości, których stosunek dwóch następnych jest zawsze iednakowy; o takich ilościach mówi się, że składają ciąg Jeometryczny.

*Przykt:* Liczby 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, i t. d. składają ciąg Jeometryczny.

Podobnie będą w ciągu Jeometrycznym, i liczby następujące:

1, 3, 9, 27, 81, 243, i t. d.

1, 4, 16, 64, 256, 1024, i t. d.

Liczba oznaczająca ile razy w wyrazie każdym następnym zawiera się ten, który go poprzedził, czyli *Wykładnik*, (Exponens) stosunku dwóch wyrazów blizkich, nazywają się *Wykładnikami* ciągu. I tak we trzech poprzedzających ciągach, wykładnikami są liczby 2 w pierwszym ciągu: 3 w drugim: a 4 w trzecim.

Ciągi przykładów poprzedzających są rosnące: ponieważ każdy w nich następny wyraz większy jest od poprzedzającego. Gdy zaś wyrazy zaczawszy



od pierwszego co raz się zmniejszając: ciąg taki nazywa się malejącym. I takie są następujące ciągi:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \text{ i t. d.}$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \text{ i t. d.}$$

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \text{ i t. d.}$$

229. W poprzedzających ciągach Jeometrycznych zaczynających się od 1, każdy wyraz po tym pierwszym idący jest wieloczynem z drugiego wziętego tyle razy ciągle za czynnika; ile wyznacza liczba okazująca miejsce, które ten wyraz w ciągu zastępuje po pierwszym wyrazie. I tak w pierwszym ciągu, drugi wyraz czyli pierwszy, po jedności jest 2: trzeci, czyli drugi po 1, jest 4, który jest wieloczynem ze dwóch, wziętych dwa razy za czynnika: a w ogólności wyraz  $(n+1)$ ty, czyli  $n$ ty po 1, jest 2, wzięte  $n$ , razy za czynnika, albo mnogość  $n$ ta liczby 2, czyli  $2^n$ .

Idzie zatem, że każdy ciąg Jeometryczny, zaczynający się od 1, złożony jest z następnych mnogości drugiego wyrazu: to jest, że ten drugi wyraz zostanie bez odmiany: trzeci wyraz będzie jego drugą mnogością, albo stopniem: czwarty wyraz będzie trzecią jego mnogością: 5ty będzie czwartą jego mnogością: i t. d. Przeto każdy ciąg Jeometryczny zaczynający się od 1, można tak ogólnie wyrazić:

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, \dots a^{n-1}.$$

230. Aby którekolwiek dwa wyrazy ciągu Jeometrycznego, rozmnożyć jeden przez drugi; dosyć jest dodać wykładniki dwóch tych wyrazów, i sumę tych dwóch wykładników dać za wykładnika drugiemu wyrazowi ciągu, który to wyraz stanie się wieloczynem dwóch tamtych. Jakoż wyraz np.  $a^3$  oznacza, że  $a$ , wzięte jest za czynnika razy 3: wyraz  $a^4$  oznacza, że  $a$ , wzięte jest za czynnika razy 4: a zatem wieloczyn z  $a^3$ , przez  $a^4$ , zawierać w sobie będzie  $a$ , wzięte za czynnika tyle razy, ile oznaczają summa liczb 3, i 4: która to summa jest 7, więc  $a^3 \times a^4 = a^7$ . A w ogólności wieloczyn z  $a^p$ , przez  $a^q$ , powinieliśmy zamykać  $a$ , wzięte za czynnika tyle razy, ile oznaczają summa wykładników  $p$ , i  $q$ ; a zatem  $a^p \times a^q = a^{p+q}$  (gdy  $p$ , i  $q$ , wyrażają liczby całkowite.)

231. Aby zaś podzielić wyraz którykolwiek tego ciągu przez drugi wyraz; trzeba odjąć ich wykładniki jeden od drugiego. Jakoż ponieważ dzielnik powinieli być równy dzielnikowi rozmnożonemu przez wieloraz; więc wykładnik dzielnego będzie równy summie wykładników dzielnika i wielorazu; (co się dopiero wyżej okazało) a zatem wykładnik wielorazu będzie różnicą wykładników dzielnego i dzielnika.

I tak

I tak  $a^5 : a^3 = a^2$ ;  $a^6 : a^2 = a^4$ ;  $a^8 : a^5 = a^3$ ; W ogólności:  
 $a^p : a^q = a^{p-q}$ .

232. Gdy  $p=q$ , wtedy  $a^p : a^q = a^p : a^p = 1$ . A że w takim razie  $a^{p-q} = a^0$ , więc  $a^0 = 1$ .

233. Gdy  $p$ , jest mniejsze niż  $q$ , wtedy  $p-q$ , będzie mniejsze niż 0, to jest będzie ilością ujemną: a zatem w takim razie wykładnik  $p-q$ , w wyrażeniu tém  $a^{p-q}$ , będzie ujemny. I tak  $a : a^2 = a^{1-2} = a^{-1}$ . Że zaś  $a : a^2 = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$ ;

więc zachowując jednokształtność wykładników, można wyrazić ułomek  $\frac{1}{a}$

■ w ten sposób  $a^{-1}$ . Tak też  $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$ ;  $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$  i t. d.

Gdybyśmy chcieli, aby powyższy ciąg nie zaczynał się od jedności, ale miał jeszcze przed nią wyrazy ułamkowe, (jeżeli  $a$  jest większe niż 1); tedy można by takowy ciąg dwojako wyrazić.

albo tak  $\frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$ , albo  $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$ , i t. d.

albo też  $a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0$  albo  $1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$ , i t. d.

234. Jeżeli zaś  $a$ , jest ułamkiem, np. jeżeli jest  $= \frac{1}{2}$ , tedy ciąg byłby malejącym w tych wyrazach, któreby po 1 następowały, a byłby rosnącym w tych wyrazach, któreby przed 1 znajdowały się: zaczynając w obiedwie strony ciąg od 1. W takim razie wykładniki wyrazów ułamkowych byłyby przydajne, a wykładniki wyrazów większych od jedności byłyby ujemne. Otóż znowu nowy przykład, na którym widzimy, iako wyrażenia ilości przydajnych i ujemnych zawisły od tego względu, pod którym je uważamy.

235. Aby mieć kwadrat wyrazu iakięgo w ciągu Jeometrycznym, trzeba podwoić wykładnika tego wyrazu: aby mieć jego sześcián, trzeba tegoż wykładnika potroić; aby mieć czwartą jego mnogość, trzeba wykładnika poczwórnić, i t. d. A w ogólności, aby wynieść wyraz  $a^m$ , do mnogości  $n$ , trzeba wykładnika  $m$ , rozmnożyć przez  $n$ , z którego to rozmnożenia, wypadnie  $a^{mn}$ , to jest mnogość  $n$ , wyrazu  $a^m$ . Co bezśrednie wypada z rozumowania uczynionego względem zamiany rozmnożenia na dodawanie.

236. Aby zaś wyciągnąć pierwiátek kwadratowy, sześcienny, czwártý mnogości, i t. d. z wyrazu iakięgo w ciągu Jeometrycznym; trzeba wykładnika tego wyrazu podzielić przez 2, 3, 4, i t. d. Okazać to na oko można

można tym sposobem, którymśmy zamianę dzielenia wyrazów na odejmowanie ich wykładników wywiedli z zamiany rozmnożenia tychże wyrazów na dodawanie ich wykładników.

237. Jeżeli wykładnik wyrazu iakiego nie może bydź podzielonym przez wykładnika pierwiastku, który wyciągnąć chcemy; tedy wykładnik wypadający z takowego dzielenia nie będzie liczbą całkowitą, a zatem nie będzie się też znajdował w ciągu Jeometrycznym: ale liczba odpowiadająca takiemu pierwiastkowi mieyscie mieć będzie między dwoma wyrazami tego ciągu, których wykładniki różnią się od siebie jednością, i jeden z nich większy będzie, a drugi mniejszy od wykładnika tego ułomkowego.

I tak: niech będzie wyraz  $a^5$ , którego oznaczyć trzeba pierwiastek kwadratowy. Wykładnik ilości  $a$ , w wyrażeniu tego pierwiastku będzie  $\frac{5}{2}$ , a zatem wyrażenie tego pierwiastku będzie  $a^{\frac{5}{2}}$ , toieft pierwiastek kwadratowy piątej mnogości, ilości  $a$ . Zachowując tedy i tu jednokształtność wykładników, iest  $\sqrt[2]{a^5} = a^{\frac{5}{2}}$ . Podobnie  $\sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$ ;  $\sqrt[2]{a^7} = a^{\frac{7}{2}}$ ;  $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$ ;  $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$ ;  $\sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{7}{3}}$ ; i t. d.

238. Té różne wyrażenia wprowadzone w ciąg Jeometryczny, który z początku miał samé wykładniki całkowite, zamienia ten ciąg w inny szereg, w którym pomieszane będą wyrazy mające wykładniki całkowite z wyrazami mającemi wykładniki ułomkowe: i ten drugi szereg, nie będzie ciągiem Jeometrycznym chyba w tym razie, gdy różnica dwóch którychkolwiek wyrazów następnych, zawsze iest jednakową.

I tak szereg ten  $1, a^{\frac{1}{2}}, a^1, a^{\frac{3}{2}}, a^2, a^{\frac{5}{2}}, a^3, a^{\frac{7}{2}}, a^4, a^{\frac{9}{2}}, a^5, a^{\frac{11}{2}}, a^6$ ; i t. d. nie przestaje bydź ciągiem Jeometrycznym zupełnym, ponieważ między wszyskie dwa następne wyrazy pierwszego ciągu z wykładnikami całkowitemi wprowadziliśmy jeden wyraz średni Jeometryczny.

Tak téż i szereg następujący  $1, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a, a^{\frac{4}{3}}, a^{\frac{5}{3}}, a^2, a^{\frac{7}{3}}, a^{\frac{8}{3}}, a^3, a^{\frac{10}{3}}, a^{\frac{11}{3}}, a^4$ , i t. d. iest ciągiem Jeometrycznym zupełnym, iakieśmy go uczynili przez wprowadzenie dwóch wyrazów średnich jeometrycznych pomiędzy dwa każde wyrazy pierwszego ciągu z wykładnikami całkowitemi.

To wprowadzenie wykładników ułomkowych, zawisło od wyrazu, któryśmy wybrali za drugi do ciągu zaczynającego się od 1. I tak w tym ciągu  $1, a^{\frac{1}{2}}, a, a^{\frac{3}{2}}, a^2$ , i t. d. jeżeli  $a=2$ , tedy on zamieni się w następujący:  $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8$ , i t. d. jeżeli zaś  $a$ , wazy jedno co  $\sqrt{2}$ , a zatem



a zatem  $aa=2$ ; tedy wszystkie w tym ciągu wykładniki są całkowite: co na oko się pokáže, ułożywszy dwa następujące ciągi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 4, & 8, & 16, & 32, & 64, & 128, & 256, & \text{i t. d.} \\ \text{i} & 1, & 4, & 16, & 64, & 256, & \text{i t. d.} \end{array}$$

Jeżeli w drugim tym ciągu, uważać będziemy liczbę 4, jak wyraz pierwszy po 1, a zatem liczby 1, 4, 16, 64, 256, i t. d. jako mające wykładniki 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. tedy pośrednie wyrazy 2, 8, 32, 128, i t. d. będą miały za wykładników ilości ułamkowe  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{7}{2}$ , i t. d. Te zaś same wyrazy mieć będą za wykładników ilości całkowite 1, 3, 5, 7, i t. d. gdy uważać będziemy liczbę 2 za pierwszy wyraz ciągu po 1.

239. Wszystkie przerabiania działań czynionych w wyrazach z wykładnikami całkowitemi, na działania daleko prostsze, mające być czynione z wykładnikami tychże wyrazów, té, mówię, przerabiania mają miejsce i w wyrazach z wykładnikami ułamkowemi.

*Przykł.* Niech będzie  $a^{\frac{m}{n}}$  wyraz jakiegokolwiek ciągu, z wykładnikami ułamkowemi, kwadrat tego wyrazu będzie

$$a^{\frac{2m}{n}}; \text{ albo } \left( \sqrt[n]{a^m} \right)^2 = \sqrt[n]{a^{2m}}.$$

Jakoż niech będzie  $\sqrt[n]{a^m} = z$ .

Więc podniósłszy do mnożności  $n$ , obiedwie strony, będzie

$$a^m = z^n.$$

A zkwadrówawszy obiedwie strony, będzie

$$a^{2m} = z^{2n} = z^n \times z^n, \text{ toieś } zz, \text{ wzięte razy } n = (zz)^n.$$

Więc wyciągnąwszy pierwiast: nty z obu stron, będzie

$$\sqrt[n]{a^{2m}} = zz; \text{ albo } a^{\frac{2m}{n}} = zz.$$

A że  $\sqrt[n]{a^m} = z$ , a zaś  $\left( \sqrt[n]{a^m} \right)^2 = zz$ .

Więc;  $\left( \sqrt[n]{a^m} \right)^2 = a^{\frac{2m}{n}}.$

Toż samo rozumowanie przystosować można i do innej jakiegokolwiek ilości z wykładnikiem ułomkowym, któryby trzeba wynieść do mnogosci jakiegokolwiek całkowitej. I tak:  $\left(\frac{m}{a^n}\right)^p = \frac{pm}{a^n}$ .

240. Aby zaś wyciągnąć pierwiątek taki, np. kwadratowy, z wyrażenia jakiego, mającego wykładnik ułomkowy; trzeba podzielić licznika w tym wykładniku przez 2, albo rozmnożyć mianownika jego przez 2. I tak  $\sqrt{\left(\frac{m}{a^n}\right)} = \frac{m}{a^{2n}}$ . Jakoż ponieważ ilość  $\frac{m}{a^n}$ , jest podwójną tego wyrażenia  $\frac{m}{2n}$  więc  $\frac{m}{a^n}$ , będzie kwadratem z  $\frac{m}{a^{2n}}$ , podług tego, co się wyżej powiedziało: a wzajemnie  $\frac{m}{a^{2n}}$  będzie pierwiastkiem kwadratowym z  $\frac{m}{a^n}$ . Można to przystosować i do innego jakiegokolwiek pierwiastku, tak dalece, że  $\frac{m}{a^{pn}}$ , będzie pierwiastkiem p-tym ilości  $\frac{m}{a^n}$ .

241. Stąd się w szczególności wnosi, iż wielkość ilości mającej wykładnik ułomkowy przez to się nie odmięni, gdy tak licznika, iako i mianownika, tego wykładnika rozmnożymy przez tenże sam wyraz. I tak np. podwoimy licznika w wykładniku, oznaczymy przez to, że ilość całą podniesioną jest do kwadratu, a podwoimy znowu mianownika, oznaczymy, że bierzemy pierwiątek tegoż kwadratu. Więc po tym dwójakiem działaniu ilość zostanie ta sama, iako była przed tym działaniem. A w ogólności:  $\frac{m}{a^n} = \frac{pm}{a^{pn}}$

242. Idzie także zatem, że z wykładnikami ułomkowymi ilości takich można czynić też same działania, któreśmy czytali w Arytmetyce z ułomkami zwyczajnymi: a w szczególności można przywieść te wykładniki ułomkowe do jednakowego mianownika.

I tak ilości  $\frac{m}{a^n}$ ,  $\frac{p}{a^q}$ , przywiezione do jednakowego mianownika, wezmą ten kształt  $\frac{mq}{a^{nq}}$ ,  $\frac{np}{a^{nq}}$ . Pierwsza z tych ilości jest pierwiastkiem  $nq$ -tym ilości  $a^{mq}$ ; druga jest pierwiastkiem  $nq$ -ty ilości  $a^{np}$ .

243. Stąd jeszcze wynika, iż aby rozmnożyć jedną przez drugą dwie ilości, z wykładnikami ułomkowymi, których podstawa czyli ilość małego te wykładniki jest jednakową, trzeba dać téj podstawie za wykładnika sumę tamtych wykładników. I tak  $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$ .

$$\text{Jakoż } a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mq}{nq}},$$

$$\text{A zaś, } a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{nq}}.$$

$$\text{Więc, } a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

$$\text{Niech będzie } \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = z = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}.$$

Więc podajemy obie strony do mocy  $nq$  (co się stanie, gdy każdego czynnika pierwiędzy strony, podnieśliemy do téjże mocy) będzie  $a^{mq} \times a^{np} = z^{nq}$ , albo,  $a^{mq+np} = z^{nq}$ .

A wyciągnąwszy z obu stron, pierwiastek mocy  $nq$ , będzie

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = z, \text{ albo, } a^{\frac{mq+np}{nq}} = z.$$

$$\text{Że zaś } z = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}; \text{ więc } a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Tenże sam sposób postępowania; i toż rozumowanie przystosować można z równą łatwością i do wykładników ułomkowych ujemnych.

244. Stosunek, który zachodzi między pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, i którymkolwiek wyrazem tegoż ciągu uważać można jak złożony z stosunków pierwiżego wyrazu do drugiego, drugiego do trzeciego, trzeciego do czwartego, i t. d. aż do stosunku wyrazu przed tym, o który idzie, znajdującego się, do tegoż samego wyrazu. A że w ciągu geometrycznym wszystkie te stosunki powinny być równe, a liczba tych stosunków oznaczona jest przez wykładnika ostatniego wyrazu; więc wykładnika



wyrazu każdego w ciągu Jeometrycznym, uważać można jako oznaczającego liczbę słoſunków równych, z których ſię ſkłada ſłoſunek pierwszego wyrazu ciągu Jeometrycznego, do tego ostatniego wyrazu.

Pod tymto ostatnim względem uważać ſię zwykły w wyższej matematyce wykładniki wyrazów w ciągu Jeometrycznym; i wtedy te wyrazy nazywają ſię Logarytmami: gdyż ſą niejaką miarą słoſunków, toieſt, oznaczają liczbę słoſunków, z których ſię ſkłada ten w ſzczegółności słoſunek, około którego czynimy działania, tak prawie, iak łuki kół, ſłużą za miarę kątów. Uważając poprzednika wſzystkich słoſunków, z którymi przypada nam mieć do czynienia, iakoby tenże ſam był wſzędzie, ſkrócono wyrażenie w ten ſpoſób, i nazwano miarą słoſunków, Logarytmy naſłepników tychże słoſunków, opuſciwszy ich pierwſze znaczenie, (§. 301. Części I. Jeom.)

245. Którymkolwiek z tych dwóch ſpoſobów uważać będziemy Logarytmy; zawsze wnieść można, że tenże ſam słoſunek, albo taż ſama liczba-ma różne Logarytmy, podług różnego słoſunku, który wzięliśmy za podſławę, czyli podług różnej liczby, którą wzięliśmy za drugi wyraz ciągu. I tak uważając słoſunek 1, do 2, iak słoſunek jednoſłayny dwóch wyrazów-ciągu; słoſunek 1 do 64, ſkładać ſię będzie z 6 słoſunków równych słoſunkowi 1 do 2: a zatem Logarytm słoſunku 1 do 64, czyli Logarytm liczby 64, będzie 6. Gdyby zaś słoſunek jednoſłayny był 1, do 4; tedy słoſunek 1, do 64, ſkładałby ſię tylko ze trzech takowych słoſunków: a zatem w takowym braniu słoſunku jednoſłaynego, Logarytm słoſunku 1, do 64, czyli liczby 64, byłby 3.

W pierwszym razie, Logarytm liczby np. 64, ieſt podwójnym Logarytmu téżże liczby w drugim razie. Tożby było i względem iakiejkolwiek innej liczby: zawsze ieſt Logarytm w pierwszym wzięciu, byłby podwójnym Logarytmu, w drugim wzięciu.

Jakoż niech w pierwszym wzięciu będzie  $2^m = a$ .

A niech w drugim wzięciu będzie  $4^n = a$ .

Pójdzie zatem, że  $m = 2n$ ; toieſt, że  $m$ , ieſt ilość podwójną ilości  $n$ . Bo ponieważ tak  $2^m$ , iak i  $4^n$ , równa ſię téżże ſamej ilości  $a$ ; więc  $2^m = 4^n$ . A że  $4^n = 2^n \times 2^n = 2^{2n}$ ; więc  $2^m = 2^{2n}$ : a zatem  $m = 2n$ .

Gdyby drugi wyraz drugiego ciągu był 8, a zatem słoſunek jednoſłayny tego drugiego ciągu, albo słoſunek pierwiastkowy, był 1 do 8; tedy wy-  
kła-

kładnik każdego wyrazu w pierwszym ciągu, byłby potrójnym wykładnika odpowiadającego sobie, w drugim tym ciągu: a zatem ułożywszy tablicę Logarytmów podług pierwszego ciągu, i wzięwszy potem połowy, albo trzecie części tych Logarytmów; té połowy, albo trzecie części będą Logarytmami wyrazów pierwszym odpowiadających w drugim ciągu, gdzie za drugi wyraz wzięliśmy 4, albo 8. A wzajemnie ułożywszy Tąblicę Logarytmów podług jednego z tych dwóch ostatnich ciągów; té same Logarytmy podwójne lub potrójne, będą Logarytmami wyrazów odpowiadających w pierwszym ciągu.

246. *Układ* (systema) Logarytmów zawisł od stosunku pierwiastkowego, z którego uważamy iakoby złożone inne stosunki: czyli zawisł od wyrazu wziętego za drugi w ciągu Jeometrycznym. Tén wyraz nazywá się *podstawą* układu Jeometrycznego: który to wyraz má 1 za Logarytm. Wykładnik zaś mnogości, do której wynieść trzeba tę podstawę, aby otrzymać liczbę daną, jest Logarytmem téj liczby.

247. W Táblicach zwyczajnych wzięto liczbę 10, za drugi wyraz ciągu, toieś, za podstawę, której Logarytmem jest 1. W takim wzięciu, Logarytmy liczb 100, 1000, 10000, i t. d. które to Logarytmy są podwójnemi, potrójnemi poczwórnemi, i t. d. względem Logarytmu liczby 10, będą 2, 3, 4, i t. d. Logarytmy liczb pośrednich, między 1, i 10, są przydatne, ale mniejsze od 1, a zatem są właściwemi ułómkami. I tak Logarytmy liczb 2, 3, 4, 5, i t. d. są 0, 3010300, 0, 4771213, 0, 6020600; 0, 6989700. i t. d.

Logarytmy liczb pośrednich, między 10, i 100, są pośredniemi, między 1, i 2, i znak ich całkowity, czyli cécha jest 1, po który idą znaki dzielne, które tu nazywamy *przydatkowemi*, (właściwie Xiątkach nazywają się *mantissa*). *Obacz w Trygonometrii, o Logarytmach, na karcie 313, §. 301 i następ.*

Gdybyśmy chcieli uważać Logarytmy iak liczby zupełnie całkowite; tedyby uważać trzeba stosunek 1, do 10, iako składający się z 100000000 stosunków równych między sobą, a w takim razie stosunek 1 do 2, składałby się z 3010300 takichże stosunków; stosunek 1 do 3, składałby się z 4771213 takich także stosunków; stosunek 1 do 4, składałby z 6020600 równych pierwszym stosunków i t. d. Albo téż trzeba by uważać liczbę 10, iako 10000000000 mnogość pewnej iakiéj liczby; a w takowém uważaniu liczby 2, 3, 4, 5,

i t. d. byłyby 30103000, 47712132, 60206000, 69897000 i t. d. mnogością téżę liczby.

Aby przywieść układ Tábliczny Logarytmów do układu, w którymby liczba 2, była podstawą; trzeba by podzielić wszystkie Logarytmy Táblicowe przez Logarytm táblicowy liczby 2, to jest przez 0, 3010300, albo ié rozmnożyć przez 3, 321928. A w ogólności, aby przywieść Logarytmy tábliczne do układu Logarytmów, mającego za podstawę liczbę jakąkolwiek; trzeba ié podzielić przez Logarytm tábliczny téżę liczby.

Podzieliwszy Logarytmy tábliczne przez liczbę 2, 302585, będziemy mieli Logarytmy nazwane Hyperbolicznemi, których wielkie iest używanie w wyższej Matematyce, a których podstawą iest 2, 71828183.

Co się tycze przystósowania rachunku przez Logarytmy do mnożenia, dzielenia, reguły trzech, wyciągania pierwiątków kwadr: i t. d. *Obacz Część I. Jeonr. §. 304 i nast.*

248. Zadanie 1. Pewna osoba mająca 10000 Cz: Zł: bierze z nich 5% procentu, nie proslęgo, ale składanego: to jest procent wzięty każdego roku łącząc z kapitałem i wrósz z nim dając go znowu na podobny procent 5% na rok każdy następujący: Ileż ta osoba ze wszystkiem będzie miała za lat 10?

Możnaby tén rachunek odprawić dodając do kapitału procent, na końcu 1go roku, i szukając procentu od téj summy na końcu 2go roku, a tén znowu procent 2go roku dodawszy do summy na końcu 1go roku zebraney, i szukając procentu; który od téj nowéj summy przypadnie, na końcu 3go roku, i t. d. Ale taki rachunek byłby bardzo długi, gdyby liczba lat miała byđz znaczna: można zaś prędko go zakończyć używszy Logarytmów.

Na końcu 1go roku kapitał powiększy się  $\frac{21}{20}$  częścią siebie samęgo; to jest stanie się  $\frac{21}{20}$  siebie samęgo.

Na końcu 2go roku, tén kapitał będzie  $\frac{21}{20}$  częścią tego, czém był na początku 2go roku, to jest będzie  $\frac{21}{20}$  z  $\frac{21}{20}$ ; albo  $(\frac{21}{20})^2$  tego czém był z samęgo początku.

Podobnym sposobem tén kapitał na końcu 3go roku będzie  $\frac{21}{20}$  z  $(\frac{21}{20})^2$  siebie samęgo, albo  $(\frac{21}{20})^3$  siebie samęgo.

Ténże kapitał na końcu 4go, 5go . . . 10go roku będzie  $(\frac{21}{20})^4$  . . .  $(\frac{21}{20})^5$  . . .  $(\frac{21}{20})^{10}$  pierwłzey swoiéy wážności.

Więc na końcu 10 lat, tén kapitał będzie 10000  $\times (\frac{21}{20})^{10}$ .



$$\text{Log.} \dots \frac{2}{5} = 0,0211893.$$

$$\text{Log.} \dots (\frac{2}{5})^{10} = 0,2118930.$$

$$\text{Log.} \dots 10000 = 4,0000000.$$

$$\text{Log. } 10000 \times (\frac{2}{5})^{10} = 4,2118930. = \text{Log. } 16289.$$

Więc za 10 lat ta osoba mieć będzie 16289 Cz: Zł.

Gdyby ten kapitał dany był na procént proſty, tak dalece, aby procénta każdego roku, nie przynosiły nowych procéntów na lata naſtępujące; tedy, ponieważ procént roczny ieſt 500 Cz: Zł: więc procént za 10 lat, byłby 5000 Cz: Zł: a zatem ſumma za 10 lat uroſłaby tylko do 15000 Cz: Zł: to ieſt, mniéj 1289 Cz: Zł.

*Inſzć przykłady. Pewná oſoba mającá 12000 Cz: Zł. bierze z nich 6% procéntu ſkładanęgo i lęz zbierze wraz z kapitałem za lat 15. I ulęby znówu miała za tę lat 15, gdyby zamiędł tego, co bierze procént roczny po 6%, brała go co 6 mieſięcy po 3%.*

*Pewný kupiec powiękſzą co rok ſwóy majątek  $\frac{1}{4}$  częſcią; ilęz będzie miał za 10 lat?*

249. *Zadanię 2. Pewná okolica, którą w ſobie zamykała tylko 10000 duſz w lat 12, powiękſzyła ſię do 15000 duſz; iakięz było powiękſzanię ſię tychże duſz?*

Niech będzie ſtoſunek ludności na początku jednego roku, do ięy powiękſzania ſię przez tén rok, iak 10000 do  $x$ . W taki ſpoſób na końcu każdego roku, ludność będzie  $\frac{10000 + x}{10000}$  tęy ludności, która była na począt-

ku tego roku a na końcu 12 lat będzie ta ludność  $\left(\frac{10000 + x}{10000}\right)^{12}$  tęy ludności, która była przed tępimi 12 laty. Wypadnie zatem naſtępujące różnanię.

$$\left(\frac{10000 + x}{10000}\right)^{12} \times 10000 = 15000.$$

Wziąwſzy Logarytmy obu ſtrón.

$$12 \text{ Log. } \frac{10000 + x}{10000} + \text{Log. } 10000 = \text{Log. } 15000.$$

Więc

$$\text{Więc Log: } \frac{10000 + x}{10000} = \text{Log: } \frac{15000 - \text{Log: } 10000}{12}$$

$$\text{A że Log: } \frac{10000 + x}{10000} = \text{Log: } (10000 + x) - \text{Log: } 10000.$$

$$\text{Więc Log: } (10000 + x) - \text{Log: } 10000 = \frac{\text{Log: } 15000 - \text{Log: } 10000}{12}$$

$$\text{A Log: } (10000 + x) = \frac{\text{Log: } 15000 - \text{Log: } 10000}{12} + \text{Log: } 10000$$

$$\text{Że zaś Log: } 15000 - \text{Log: } 10000 = 0,1760913.$$

$$\text{A zatem } \frac{\text{Log: } 15000 - \text{Log: } 10000}{12} = 0,0146743.$$

a dodawszy 4, to jest

$$\text{Log: } 10000, \text{ będzie } 4,0146743.$$

$$\text{Więc, Log: } (10000 + x) = 4,0146743 = \text{Log: } 10344.$$

$$\text{a zatem, } 10000 + x = 10344.$$

$$x = 344.$$

Więc powiększenie roczne ludności, jest między 3, i 4 od sta.

*Inszé przykłady. - Pewny kráý, którego ludność nie jest w mierze obszer-  
ności iego, zawiera w sobie dusz 800000, iakizby powinni być stosunek téý lu-  
dności do roczného iéý powiększenia się, aby po skończonym wieku jednym kráý tén  
zawierał w sobie 12000000.*

*Pewná osoba chciaaby w lát 18 podwoić swój majątek 10000 Cz: Zł: da-  
jąc go na procent składany. Jakiz má być tén procent?*

250. Zadanie 3. *Winiéném kómn 10000 Cz: Zł: które obowiązałém się  
za lát 6 wypłacić. Ilizby mi teráz zaráz wypłacić należało dla pozbycia się tego  
długu, rachując procent po 6%?*

Gdy dziś winién jestém summę iaką rachując procent po 6%, jedno to  
jest, iak gdybym był winién ( $\frac{100}{106}$ )<sup>6</sup> téý summy, które ( $\frac{100}{106}$ )<sup>6</sup> miałbym wypła-  
cić dopięo za 6 lát bez procentu; albo, co na jedno wychodzi, gdy dziś wi-  
nién jestém np. 100<sup>6</sup> Cz: Zł. jedno to jest, iak gdybym był winién 106<sup>6</sup> Cz:  
Zł: za lát 6. I wzajemnie iezeli winién jestém 106<sup>6</sup> Cz: Zł: które mám za 6 lát  
wy-

wypłacić, iedno to jest, iak gdybym dziś zaráz obowiązany był wypłacić  $100^6$  Cz: Zł: azatém summa szukana, jest czwartym wyrazem proporcji, której trzema pierwszemi wyrazami są liczby  $106^6$ ,  $100^6$ , i  $10000$ . Wyrażenie zaś téj summy będzie następujące:  $10000 \times (\frac{106}{100})^6$ .

$$\text{Log: } \frac{106}{100} = -1, + 9746941.$$

$$6 \text{ Log: } (\frac{106}{100})^6, \text{ albo } \text{Log: } (\frac{106}{100})^6 = -1, + 8481646.$$

$$\text{Log: } 10000 = 4.$$

Summa . . . . . 3, 8481646 = Log: 27050 Cz: Zł: blisko. Wąžność długu której szukałem.

Dłá sprawdzenia tego, szukamy wąžności po 6 latach skończonych summy 7050 Cz: Zł: której teraz zaráz wypłacić należało. Wąžność ta będzie  $7050 \times (\frac{106}{100})^6$ : uczyniwszy zaś rachunek iak wyżej, znajdziemy tę wąžność, ledwie pół Cz: Zł: różniącą się od 10000 Cz: Zł:

Inszé przykłady. Jakąż jest terażniejszą wąžność Cz: Zł: 12000, które dopiero za lát 10 mają być wypłacone, rachując procent po 5%.

I znouu. Jakąż jest wąžność terażniejszą 18000 Cz: Zł: które dopiero za lát 20 mają być wypłacone rachując procent po 5%?

251. Zadanie 4. Pewná osoba má 10000 Cz: Zł: z których bierze procent składany po 5%. Za ileż lát majątek téj osoby będzie podwoionym?

Niech liczba lát szukana będzie  $x$ : wąžność kapitału 10000 Cz: Zł: na końcu lát  $x$ , będzie  $10000 \times (\frac{21}{20})^x$ .

$$\text{Warunek. } 10000 \times (\frac{21}{20})^x = 20000.$$

$$\text{Przerabianie. (Podzieliw: obie str. 1. przez 10000) } (\frac{21}{20})^x = 2.$$

$$\text{(Wziąwszy Log: obu stron) } x \text{ Log: } \frac{21}{20} = \text{Log: } 2.$$

$$\text{albo } x \times 0,0211893 = 0,3010300.$$

$$\text{Więc } x = \frac{0,3010300}{0,0211893} = 14 \text{ lát. i prawie 2 miesiącóm.}$$

Więc na końcu 14 lát, kapitał urośł do  $10000 \times (\frac{21}{20})^{14}$  Czerw: Zł: = 19800 Cz: Zł: blisko. Na końcu 15 lát urośł blisko do 20790 Cz: Zł: A zatém kapitał ten podwoiony był na końcu trochę więcej niż czternástu lát.

Inszé przykłady. Za ileż lát pewná summa daná na procent składany 6% powiększona będzie  $\frac{1}{2}$  częścią téj saméj?

Za ileż lát pewná summa daná na procent składany 6% będzie potrojoná?

252. Zadanie 5. Pewná osoba dała 12000 Zł: na procent składany 5%, a 10000 Zł: na procent składany 6%. Za ileż lát dwa té kapitaly, wzięte wraz z procentami swemi zroównają się z sobą?



Ważność 1go kapitału na końcu téj liczby lat będzie  $12000 \times (\frac{105}{100})^x$   
 . . . . . 2go . . . . .  $10000 \times (\frac{105}{100})^x$

Warunek.  $12000 \times (\frac{105}{100})^x = 10000 \times (\frac{105}{100})^x$ .

Przerób: Podziel: obie strony przez 2000)  $6 \times (\frac{105}{100})^x = 5 \times (\frac{105}{100})^x$ .

(Rozmn: obie strony przez 100<sup>x</sup>.)  $6 \times 105^x = 5 \times 106^x$ .

(Wziąwszy Logarytm obu stron)

Log:  $6 + x$  Log:  $105 =$  Log:  $5 + x$  Log:  $106$ .

(Odiąwszy Logarytm 5 po obu stronach)

Log:  $6 -$  Log:  $5 + x$  Log:  $105 = x$  Log:  $106$ .

(Odiąwszy  $x$  Logarytm  $105$  po obu stronach)

Log:  $6 -$  Log:  $5 = x$  Log:  $106 - x$  Log:  $105$ .

(Podzieliwszy obie strony przez Log:  $106 -$  Log:  $105$ )

Log:  $6 -$  Log:  $5$

$\frac{\text{Log: } 6 - \text{Log: } 5}{\text{Log: } 106 - \text{Log: } 105} = x$ .

$$\text{Rozw: } x = \frac{\text{Log: } 6 - \text{Log: } 5}{\text{Log: } 106 - \text{Log: } 105} = \frac{0,0791813}{0,0041166} = \frac{791813}{41163} =$$

19 lat i trochę mniej, niż 3 miesiące.

Na końcu 19 lat i wszy kapitał będzie  $12000 \times (\frac{105}{100})^{19} = 30324$  blisko.

. . . . . 2gi . . . . .  $10000 \times (\frac{105}{100})^{19} = 30255$  blisko.

Dodawszy do każdéj z tych dwóch summ, czwartą część ich procen-  
 tów roku całego, będzie i wżá summa 30703: a druga 30708: które to sum-  
 my różnią się tylko od siebie 5 Cz: Zł: ta zaś różnica względem summy całej  
 większý niż 30000, nie jest nawet  $\frac{1}{8000}$  częścią onéjże.

Inszé przykłady. Pewná osoba daie 15000 Zł: na procént składany 7%, a  
 20000 Zł: na procént także składany 5%. Za ileż lat té dwa kapitały wzięte wráz  
 z procéntami swými, zrównaię się?

Niech znnowi będą dwie summy 24000 i 18000 Zł: procént od iwszéj 6%,  
 od 2giéj 8%. Za ileż lat iwszy kapitał przewyższać będzie tylko  $\frac{1}{2}$  częścią drugi  
 kapitał?

253. Zadanié 6. Pewná osoba daie 5600 Zł. na składany procént 6%;  
 ale tak, że procént tén, má iły przypadać co 6 miesięcy po 3%, i znnowi daie 6000 Zł:  
 na takież procént po 6%; tén zaś drugi procént má iły rocznie przypadać. Za ileż  
 lat té dwa kapitały, wzięte wráz z procéntami swými zrównaię się?

Niech

Niech będzie liczba szukana lat . . . . .  $x$ .

Ważność 1go kapitału na końcu lat  $x$ , będzie . .  $5600 \times (\frac{100}{98})^x$ .

. . . . . 2go . . . . .  $6000 \times (\frac{100}{98})^x$ .

*Warunek.*  $5600 \times (\frac{100}{98})^x = 6000 \times (\frac{100}{98})^x$ .

*Przerób:* (Podziel: obie strony przez 400)  $14 \times (\frac{100}{98})^x = 15 (\frac{100}{98})^x$ .

(Wziąwszy Logarytm obu stron)

$\text{Log: } 14 + x \text{ Log: } \frac{100}{98} = \text{Log: } 15 + x \text{ Log: } \frac{100}{98}$ .

(Odiąwszy po obu stronach  $\text{Log: } 14 + x \text{ Log: } \frac{100}{98}$ )

$x \text{ Log: } \frac{100}{98} - x \text{ Log: } \frac{100}{98} = \text{Log: } 15 - \text{Log: } 14$ .

albo  $x(2 \text{ Log: } \frac{100}{98} - \text{Log: } \frac{100}{98}) = \text{Log: } 15 - \text{Log: } 14$ .

(Wziąwszy w samej rzeczy te Logarytmy)

$x(2 \times 0,0128372 - 0,0253059) = 0,0299633$ .

albo  $x(0,0003685) = 0,0299633$ .

*Rozwiązanie.*  $x = 2^{\frac{0,0299633}{0,0003685}} =$  trochę mniej niż 82 lat.

*Inszy przykład prawie podobny pierwszemu.*

Pewna osoba dała 10000 Zł. na procent składany 8%, rachując procenta co 6 miesięcy; za ileż lat cały majątek tej osoby będzie większy  $\frac{1}{10}$  częścią, niż gdyby ta osoba też samą sumę dała była, na tenże sam procent 8%, wymawiając go sobie dopiero po każdym roku skończonym.

254. Można znaleźć sumę ciągu Geometrycznego bez dodawania następnego wyrazów tego ciągu.

I tak niech będzie ciąg Geometryczny podwójny.

1, 2, 2<sup>2</sup>, 2<sup>3</sup>, 2<sup>4</sup>, 2<sup>5</sup>, 2<sup>6</sup>, 2<sup>7</sup>, . . . 2<sup>n-1</sup>.

Podwoiwszy każdy

wyraz będzie . . . 2, 2<sup>2</sup>, 2<sup>3</sup>, 2<sup>4</sup>, 2<sup>5</sup>, 2<sup>6</sup>, 2<sup>7</sup>, . . . 2<sup>n</sup>.

Ponieważ wszystkie wyrazy drugiego ciągu, są podwojeniami wyrazów pierwszego ciągu; więc różnicą tych dwóch ciągów będzie także ciąg i wszy. A że też różnica tych dwóch ciągów jest 2<sup>n</sup> - 1, bo wszystkie wyrazy drugiego ciągu oprócz 2<sup>n</sup>, są i w pierwszym ciągu, a w drugim ciągu nie mają znowu wyrazu 1, który jest w pierwszym ciągu; więc aby znaleźć sumę liczby  $n$ , wyrazów ciągu Geometrycznego, podwójnego, zaczynającego się od 1; trzeba odjąć tę jedność od ostatniego wyrazu podwojonego, czyli od wyrazu, któryby następował po ostatnim.

Niech będzie  $f = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{n-1}$ .

Podwoiwszy każdy

wyraz, będzie  $2f = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^n$ .

Od stron 2go ró-

wnania, odiawszy

strony 1go ró-

wnania, będzie  $f = -1 + \dots + 2^n$ .

albo  $f = 2^n - 1$ .

*Przykl: Koń ma 8 gwoździ, u każdej podkowy, a zatem u 4 podków ma 32 gwoździ. Ileżby przypadło dać za tego konia, gdyby kto chciał go przedać pod tym warunkiem, aby mu za 1wszy gwoździe dano grosz 1, za 2gi groszy 2, za 3ci gr: 4, za 4ty gr: 8 i t. d. dwójac zawsze cenę każdego gwoździa następnego.*

Cena tego konia jest  $2^{32} - 1$ , gr. podług tego, co się dopiero powiedziało.

$$2^2 = 4.$$

$$2^4 = 16.$$

$$2^8 = 256.$$

$$2^{16} = 65536.$$

$$2^{32} = 4294967296.$$

$$2^{32} - 1 = 4294967295 \text{ groszy.}$$

Podzieliwszy tę ostatnią liczbę przez 540, to jest przez wartość czerwonego złotego w grotach, byłaby cena konia 7953643 Cz: Zł: i gr: 75, albo Zł: 2, gr: 15.

255. Niech znowu będzie  $f = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + \dots + 3^{n-1}$ .

Potroiwszy każdy wy-

raz będzie  $3f = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + \dots + 3^n$ .

Od stron 2go równa-

nia, odiawszy strony 1go

równania będzie  $f = -1 + \dots + 3^n = 3^n - 1$ .

Podzieliwszy obie

strony przez 2;

będzie  $f = \frac{3^n - 1}{2}$ .

Trzeba więc od wyrazu tego, któryby następował po ostatnim, odiać 1, i tę resztę wziąć połowę.



256. Niech będzie  $f = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + \dots + 4^{n-1}$ .

Poczwórzwszy każdy

wyrząd będzie  $4f = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + \dots + 4^n$ .

Odiawszy tak iak wy-

zėy będzie  $3f = -1 + \dots + 4^n = 4^n - 1$ .

Podzieliwszy obie

strony przez 3 będzie  $f = \frac{4^n - 1}{3}$ . *Trzeba więc od wyrazu tego, któryby następował po ostatnim, odjąć 1, i resztę wziąć zcię część.*

Ogólnie. Niech będzie  $f = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + \dots + p^{n-1}$ .

Rozmna: każdy wyrząd

przez  $p$ , będzie  $pf = p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + \dots + p^n$ .

Odiawszy tak iak wyzėy,

będzie  $pf - f = -1 + \dots + p^n = p^n - 1$ .

albo  $f(p-1) = p^n - 1$ .

Podzieliwszy obie stro-

ny przez  $p-1$   $f = \frac{p^n - 1}{p - 1}$ .

To jest: trzeba od wyrazu, któryby następował po ostatnim odjąć 1, i resztę podzielić przez różnicę pierwszych dwóch wyrazów.

257. Jeżeli ciąg Jeometryczny nie zaczyna się od jedného; tedy wszę-lako można go przywieść do takiego ciągu, któryby za twiży wyrząd miał 1.

I tak niech będzie ciąg Jeometryczny, którego pierwszym wyrazem jest  $a$ , drugim  $b$ ; wykładnik tego ciągu jest  $\frac{b}{a}$ , a zatem ciąg tén można w taki kształt wyrazić:

$$a, a \times \frac{b}{a}, a \times \frac{b^2}{a^2}, a \times \frac{b^3}{a^3}, a \times \frac{b^4}{a^4}, a \times \frac{b^5}{a^5}, a \times \frac{b^6}{a^6} + \dots + a \times \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Więc summa tego ciągu jest:

$$a \left( 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^7}{a^7} + \dots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} \right).$$

$$= a \left[ \frac{\frac{b^n}{a^n} - 1}{\frac{b}{a} - 1} \right] = a \left( \frac{b^n - a^n}{a^n} : \frac{b-a}{a} \right) = a \left( \frac{b^n - a^n}{a^n} \times \frac{a}{b-a} \right) =$$

$$a \times \frac{(b^n - a^n)}{a^{n-1}(b-a)} = \frac{b^n - a^n}{a^{n-2}(b-a)}. \text{ Uczyniwszy } \frac{b}{a} = p; \text{ będzie ta sum-}$$

$$\text{ma} = a \times \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

258. W wyrażeniu tém  $\frac{p^n - 1}{p - 1}$ , summy ciągu Jeometrycznego, który má 1 za pierwszy wyraz, a którego wykładnikiem jest  $p$ ; jeżeli  $p$ , jest mnieysze od 1; tém bardziey  $p^n$  mnieylze będzie od 1: a zatem tak licznik, iak i mianownik tego ułomku  $\frac{p^n - 1}{p - 1}$  będą w takim razie ujemnemi. Rozmnożywszy zaś każdego z nich przez ilość  $-1$ , obadwa staną się przydatnemi, i wyrażenie powyższe summy zamieni się w to  $\frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$ . Co téż można by i bezśrednie okazać w sposób następujący:

259. Niech będzie cią-

gu Jeometrycznego summa .  $f = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Wziąwszy połowę,

będzie . . . . .  $\frac{1}{2}f = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots \frac{1}{2^n}$

Odiąwszy strony 2go

równania od stron 1go będzie  $\frac{1}{2}f = 1 \dots \dots \dots - \frac{1}{2^n}$

Podwóiwszy obie

strony . . . . .  $f = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$  To ostatnie wyrażenie zgádza się

z wyrażeniem ogólném  $\frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$ . Bo tu jest  $p = \frac{1}{2}$ .

a zatem:

$$\frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

W tym razie, jeżeli od 2, odejmiemy ostatni wyraz ciągu, reszta będzie sumą całego ciągu. Czego nawet dowieść można i przez rozumowanie.

Summie dwóch pierwszych wyrazów, brakuje  $\frac{1}{2}$  do tego, aby czyniła 2: a zatem trzebaby, aby trzeci wyraz był  $\frac{1}{2}$ , toby dopiero sum trzech wyrazów pierwszych była 2. A że ten trzeci wyraz jest tylko  $\frac{1}{4}$ , to jest połowa drugiego wyrazu  $\frac{1}{2}$ ; więc summie trzech wyrazów pierwszych, brakować będzie  $\frac{1}{4}$  do tego, aby ta summa czyniła 2, to jest brakować ię do tego będzie samęgo trzeciego wyrazu. Tak też summie czterech pierwszych wyrazów, brakować będzie połowy z  $\frac{1}{4}$ , albo  $\frac{1}{8}$ , to jest brakować ię będzie czwartęgo wyrazu do tego, aby ta summa czyniła 2; i t. d.

A zatem summa ciągu malejącego 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ , i t. d. tém bardzięj zbliża się do 2; im większą jest liczba wyrazów tego ciągu, i może do téj ważności 2, przybliżyć się bardzięj, niż iakakolwiek różnica naznaczona, ni gdy jednak téj ważności 2, nie przeniesie. I przeto gdy ciąg powyższy uważa się iakoby przedłużony był, nad wszelką liczbę wyrazów naznaczoną; tedy liczba 2, w takim razie nazywa się sumą tego ciągu.

260. Niech znowu będzie ciąg Jeometryczny malejący:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729} \dots \frac{1}{3^{n-1}}.$$

$$\text{Niech będzie } f = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \dots \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Wziąwszy 3cią

$$\text{część będzie } 3f = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \dots \frac{1}{3^n}.$$

Odiąwszy 2gié równa-

$$\text{nie od 1wszego będzie } \frac{2}{3}f = 1 \dots \frac{1}{3^n}.$$

Petroiwszy obie

$$\text{strony } 2f = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Podzie-



Podzieliwszy

przez 2; . . .  $f = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}$ .

To jest: od  $1\frac{1}{2}$ , trzeba odjąć połowę ostatniego wyrazu, a reszta będzie sumą ciągu mającego liczbę  $n$  wyrazów, a zatem wyraz ułomkowy  $\frac{1}{2}$ , jest granicą summy tego ciągu. Co też okazać można, i przez rozumowanie podobne temu, któregośmy użyli w ciągu poprzedzającym.

261. Niech jeszcze

będzie . . . .  $f = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \frac{64}{729} + \dots - \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ .

Wziąwszy  $\frac{1}{3}$  obu

stron . . . .  $\frac{2}{3}f = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \frac{64}{729} + \dots - \frac{2^n}{3^n}$ .

Odiąwszy 2gic

równanie od 1wszego  $\frac{f}{3} = 1 - \frac{2^n}{3^n}$ .

Rozmnożywszy

obie strony przez 3 . .  $f = 3 - \frac{2^n}{3^{n-1}} = 3 - 2 \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ .

To jest: od 3, trzeba odjąć podwójny wyraz nty, a tak znaleziona będzie summa liczby  $n$  wyrazów tego ciągu: a zatem liczba 3 jest tu granicą ciągu, która to liczba 3, jest sumą ciągu całego, gdy ten ciąg przedłużymy, iakoby przedłużony aż do liczby wyrazów, przewyższającej wszelką liczbę naznaczoną.

Ogólnie. Niech będzie ciąg malejący:

1,  $\frac{1}{p}$ ,  $\frac{1}{p^2}$ ,  $\frac{1}{p^3}$ ,  $\frac{1}{p^4}$ ,  $\frac{1}{p^5}$ ,  $\frac{1}{p^6}$ , . . .  $\frac{1}{p^{n-1}}$ .

Niech będzie  $f = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} + \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^7} + \dots + \frac{1}{p^{n-1}}$ .

Rozmn: obie strony

przez  $\frac{1}{p}$ , będzie  $\frac{f}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} + \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^7} + \dots + \frac{1}{p^n}$ .

Odiąwszy

Odiawszy 2gié ró-

wnanie od 1wszego . . .  $f\left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 - \frac{1}{p^n}$   
 albo;  $f \times \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p^n}$ .

Podzieliwszy obie strony przez  $\frac{p-1}{p}$ , czyli rozmnożywszy przez

$$\frac{p}{p-1}; f = \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1} \times \frac{1}{p^{n-1}}.$$

To jest: trzeba podzielić wykładnika ciągu przez tegoż wykładnika zmniejszonego jednostką, a od wielorazu tego odjąć ostatni wyraz ciągu podzielony przez wykładnika zmniejszonego jednostką: reszta będzie summą liczby n, wyrazów ciągu. A zatem wyraz  $\frac{p}{p-1}$ , jest granicą ciągu, który to wyraz nazywa się wtedy summą ciągu, gdy liczba wyrazów przewyższa wszelką liczbę naczoną.

262. Jeżeli licznik drugiego wyrazu nie jest 1, tak dalece, że  $\frac{1}{p}$   
 $= \frac{m}{n}$ , albo  $p = \frac{n}{m}$ ; wtedy  $f = \frac{n}{m} : \frac{n}{m} - 1 = \frac{n}{m} : \frac{n-m}{m} = \frac{n}{n-m}$ .

263. Nakoniec, jeżeli pierwszym wyrazem ciągu nie jest 1, ale na przykład a, i jeżeli drugi wyraz np. b, jest mniejszy od pierwszego; tedy i w takim razie można oznaczyć ciąg geometryczny malejący, na wzór ciągów rosnących, w sposób następujący:

$$a, a \times \frac{b}{a}, a \times \frac{b^2}{a^2}, a \times \frac{b^3}{a^3}, a \times \frac{b^4}{a^4}, a \times \frac{b^5}{a^5} \dots a \times \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$$

albo;  $a \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \dots \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$

Rr Grd

Granica tego ciągu jest  $a\left(\frac{a}{a-b}\right)$ , albo  $\frac{aa}{a-b}$ .

264. Zagadnienie I. Mając dany drugi wyraz ciągu geometrycznego malejącego, i jego granicę (którą dalej nazywać będziemy summą) znaleźć ten ciąg.

Niech będzie  $f$ , summa daná, niech będzie  $b$ , wyraz drugi ciągu tak-  
że dany.

Mianowicie. Pierwszy wyraz szukany . . . . .  $x$ .

Summa ciągu będzie . . . . .  $\frac{xx}{x-b}$ .

Warunek.  $\frac{xx}{x-b} = f$ .

Przerób: (Rozmnożywszy obie strony przez  $x-b$ )

$$xx = fx - bf.$$

(Odiąwszy  $fx$  po obu stronach)  $xx - fx = -bf$ .

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszy stronie)

$$xx - fx + \frac{x}{4}f = \frac{x}{4}f - bf = \frac{f^2 - 4bf}{4}.$$

(Wyciągn: pierw: kwadratu z obu stron)

$$x - \frac{x}{2}f = \frac{\pm \sqrt{f^2 - 4bf}}{2}.$$

(Dodawszy  $\frac{x}{2}f$  po obu stronach)

$$x = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - 4bf}}{2}.$$

$$\text{Rozwiązanie. } x = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - 4bf}}{2}.$$

$$xx = \frac{2f^2 - 4bf \pm 2f\sqrt{f^2 - 4bf}}{4} = \frac{f^2 - 2bf \pm f\sqrt{f^2 - 4bf}}{2}.$$

$$x - b = \frac{f - 2b \pm \sqrt{f^2 - 4bf}}{2}.$$



$$\frac{x - b}{f - 2b \pm \sqrt{f(f - 4bf)}} = \frac{f - 2b \pm \sqrt{f(f - 4bf)}}{f - 2b \pm \sqrt{f(f - 4bf)}} = 1$$

265. Uwaga I. Aby  $x$ , było ilością istotną, a zatem, aby Zagadnienie mogło się rozwiązać, trzeba do tego, aby  $\sqrt{f(f - 4bf)}$  był ilością istotną: przeto  $(f - 4bf)$ , powinno być ilością przysadną. Więc w poprzedzającym rozwiązaniu, najmniejszą wartość  $f$ , powinna być równa wartości  $4bf$ , a zatem najmniejszą wartość  $f$ , wtedy będzie, gdy się równa wartości  $4b$ . W takim razie  $x = \frac{1}{2}f = 2b$ . Więc ciąg, jest wtedy ciągiem geometrycznym półdwójnym (Progressio subdupla) to jest takim, gdzie każdy wyraz następny, jest połową poprzedzającego.

2. Póki  $f$ , jest większe niż  $4b$ , póty wartości  $f$ , i  $b$ , odpowiadają dwie wartości  $x$ , czyli wartości pierwszego wyrazu, tak dalece, że dwa będą takie ciągi, których też sama będzie summa, i tenże sam wyraz drugi.

Przykład. Niech będzie  $f = \frac{3}{2}$ ;  $b = \frac{1}{3}$ .

$$x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2} - 2)}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Dwa ciągi będą  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$  i t. d.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$  i t. d.

Summa 1go ciągu jest  $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ .

Summa 2go ciągu jest  $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4} : \frac{2}{9} = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}$ .

Podobnie niech będzie  $f = 1\frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ .

$$x = \frac{1\frac{1}{3} \pm \sqrt{1\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}}{2} = \frac{1\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{6}}}{2} = \frac{1\frac{1}{3} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}}{2} = \frac{1}{2}$$

Dwa ciągi będą  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$  i t. d.

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$  i t. d.

Rr 2

Summa

Summa 1go jest  $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 : \frac{3}{4} = 1 \times \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ .

Summa 2go jest  $\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{9} : (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{9} : \frac{1}{12} = \frac{1}{9} \times 12 = 1\frac{1}{3}$ .

3. Możnā, ile zechcemy, tylē znaleźć ciągów Jeometrycznych malejących, k 6rychby summa byēa jednakowā; poniewāż w oznaczeniu poprzedzających wāżnośc 1go wyrazu dołyc bēdzie tym końcēm odniēniaē co rāz wāżnośc 2go wyrazu.

Wygodniēy jednak jest odniēniaē wāżnośc 1go wyrazu, a potēm wyprowadzić stād wāżnośc 2go wyrazu. Dłā czēgo w r6wnaniu tēm  $\frac{aa}{a-b} = f$ , szukāymy wāżnośc 2go wyrazu drugiego  $b$ , k6tryby byē oznaczony w ilośc 6ciach  $a$ , i  $f$ . Bēdzie naprz6d:  $aa = af - bf$ , a stād,  $b = \frac{af - aa}{f} = a - \frac{aa}{f}$ .

Przykłād. Niech bēdzie  $f = 2$ ;  $a = 1$ ;  $b = \frac{1}{2}$ .  
 $a = \frac{1}{2}$ ;  $b = \frac{3}{8}$ .  
 $a = \frac{1}{3}$ ;  $b = \frac{5}{18}$ .  
 $a = \frac{2}{3}$ ;  $b = \frac{4}{9}$ .  
 $a = \frac{3}{2}$ ;  $b = \frac{3}{8}$ .

4. Jeżeli weźmiemy  $a$ , wiēksze niēzi  $f$ , tedy ilośc  $a - \frac{aa}{f}$ , czyli  $b$ , to jest wyraz drugi bēdzie ujemnym, i ciāg skłādāc siē bēdzie z wyraz6w na przemiany przydajnych i ujemnych.

Przykł:  $a = 3, f = 2, a - \frac{aa}{f} = 3 - \frac{9}{2} = \frac{6}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$ .

Ciāg:  $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \frac{3}{32} + \frac{3}{64} - \frac{3}{128}$  i t. d.

$= 3(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128})$  i t. d.)

Szereg tēn  $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128})$  i t. d.) jest r6żnicā dw6ch nastēpujācych szereg6w.

$(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots)$  i  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \dots)$ .

R6żnica

Różnica ta jest  $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots) - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots) = \frac{1}{2}(1 : \frac{3}{4}) = \frac{2}{3}$ , które to  $\frac{2}{3}$ , rozmnożywszy przez 3, wypadnie 2, to jest summa daná.

266. Zagadnienie 2. Pewná osoba, która má summe  $f$ , powiększá swoý maitek czwartá częścią corocznie, odtáczyszý na wydátki iednakowá summe na pocztáku každého roku: Jakdż powinna bydż ta summa, aby maitek téy osoby w lát 10, zosíł 5 razy tak wielki, iak był na pocztáku?

Gdyby ta osoba nie wyláczála nic na wydátki z maítáku swégo; tedy na koncu lát 10, maitek iéy byliby  $(\frac{5}{4})^{10} f$ .

Summa, którą zebrała na pocztáku 1go roku, stałaby się na koncu 10 lát  $(\frac{5}{4})^{10}$  téýze saméy summy.

Summa, którą zebrała na pocztáku 2go roku, stałaby się za 9 lát  $(\frac{5}{4})^9$  onéýze saméy.

Summa, którą zebrała na pocztáku 3go roku, stałaby się za 8 lát  $(\frac{5}{4})^8$  onéýze saméy.

I tak daléy, až do summy, którą ta osoba zebrała na pocztáku 10tého roku, která to summa przez 1 rok, stałaby się  $\frac{5}{4}$  onéýze saméy.

Nazwiéymy wydatek roczny przez  $x$ .

Zmniejszenie całé maítáku téy osoby, pochodzące z wyláczeń wśzystkich corocznych na wydátki, to, mówię, zmniejszenie wyrażá się przez wieloczyn z ilości  $x$ , rozmnożonéy przez summe ciągu

$$(\frac{5}{4} + (\frac{5}{4})^2 + (\frac{5}{4})^3 + (\frac{5}{4})^4 + \dots + (\frac{5}{4})^{10})$$

$$\text{Tén zaś wieloczyn jest } \frac{5}{4}x \left( \frac{(\frac{5}{4})^{10} - 1}{\frac{5}{4} - 1} \right) = 5x \left( \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}} \right)$$

A maitek téy osoby na koncu 10 lát, będzie

$$(\frac{5}{4})^{10} f - 5x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}}$$

A że ta osoba má mieć na koncu 10 lát, 5 razy tylé, ilé miała na pocztáku; więc

$$\text{Warunek. } (\frac{5}{4})^{10} f - 5x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}} = 5f$$

$$\text{Przetáń: (Dodáwśý } 5x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}} \text{ po obu stronach)}$$

Rr 3

$(\frac{5}{4})^{10}$



$$\left(\frac{5}{4}\right)^{10} f = 5f + 5x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}}.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 5)

$$\frac{5^9}{4^{10}} f = f + x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}}.$$

(Odejmawszy  $f$ , po obu stronach, i przywiódłszy je do ułamków)

$$\frac{5^9 - 4^{10}}{4^{10}} f = x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}}.$$

(Rozmnożywszy obie strony przez  $4^{10}$ )

$$(5^9 - 4^{10}) f = x(5^{10} - 4^{10}).$$

(Podzieliwszy obie strony przez  $5^{10} - 4^{10}$ )

$$x = \frac{5^9 - 4^{10}}{5^{10} - 4^{10}} f = \frac{1953125 - 1048576}{9765625 - 1048576} f = \frac{904549}{8717049} f = \frac{11}{106} f \text{ blisko}$$

Przeto, jeżeli ta osoba miała naprzód Zł. 8717049; tedyby wydatek iéy roczny powinién byé 904549 Zł. aby się prawdziło, iż za kít 10, zbierze 5 razy tylé, ilé miała przed 10 laty.

*Inszé przykłady.* Pewná osoba, która już nie zakłada sobie żyć więcéy, iak lát 6, a má z czego utrzymywać się przez rok 1, daie sumę  $f$ , na 5% procentu. Jakaż część téy summy má corocznie wybierać na roczné wydatki, zaczawszy od początku 2go roku, aż do początku 6tego roku, aby wybraawszy ostatnią część, nie iéy się z kapitału całego nie zostało.

Inná osoba chciaaby znówu pod podobnemi, iak tamta, warunkami, aby iéy kapitał za lát 10, zmniejszył się do połowy.

Winién kto 10000 Cz: Zł: które má wypłacić za lát 10, bez procentu. Godzi się z wierzycielém, iż mu corocznie równą część wypłacać będzie, zaczynając to wypłacénie za rok (co uczyni 10 równych wypłać). Iléż za każdą razę przydzie mu wypłacić, aby zupełnie dług zaspokoil, po ostatniém wypłacéniu, rachując procent składany po 5%.

267. Zagadniénie 3. Pewná osoba má 10000 Cz: Zł: od których może mieć składany procent 5%, obiera sobie jednak dać tén kapitał na przepadek (á fond perdu) byleby corocznie brała od niego aż do śmierci procent po 10%, toieś 1000 Cz: Zł: Tén dochód odbierając na końcu každého roku, daie go zarzą na procent 5%, i pozwala zbierać się co ráz bardziéy tym procentóm. Za iléż lát będzie ta osoba miała téż sam kapitał, któryby téż byta zebrata w tymże czasie, gdyby

by była nie dawała na przepadek swojej summy 10000 Cz: Zł: ale tylko na składany procent 5%?

Niech będzie  $x$ , liczba lat.

Kapitał téy osoby na końcu lat  $x$ , stałby się 10000  $(\frac{21}{20})^x$  (§. 248).

Dochód 1000 Cz: Zł: który ta osoba odbierze na końcu 1 go roku, urośnie przez lat  $x-1$ , (przez które procent składany przynosić będzie) do 1000  $(\frac{21}{20})^{x-1}$ .

Dochód 2gi przez lat  $x-2$ , urośnie do 1000  $(\frac{21}{20})^{x-2}$ .

Dochód 3ci, przez lat  $x-3$ , urośnie do 1000  $(\frac{21}{20})^{x-3}$ .

I t. d. aż do ostatniego dochodu, który ważności swojej nie odmięni.

A zatem cała ważność tego dochodu, na końcu liczby lat szukaney,

będzie

$$\begin{aligned} & 1000 \left( (\frac{21}{20})^{x-1} + (\frac{21}{20})^{x-2} + (\frac{21}{20})^{x-3} + \dots + 1 \right) \text{ albo,} \\ & 1000 \left( 1 + \frac{21}{20} + (\frac{21}{20})^2 + (\frac{21}{20})^3 + \dots + (\frac{21}{20})^{x-1} \right) = \\ & \frac{1000 \times (\frac{21}{20}^x - 1)}{\frac{21}{20} - 1} \quad (\S 255) = 20000 \left( (\frac{21}{20})^x - 1 \right). \end{aligned}$$

Warunek.  $20000 \left( (\frac{21}{20})^x - 1 \right) = 10000 (\frac{21}{20})^x$ .

Przerób: (Podzieliwszy obie strony przez 10000)

$$2 \left( (\frac{21}{20})^x - 1 \right) = (\frac{21}{20})^x \text{ albo } 2 \times (\frac{21}{20})^x - 2 = (\frac{21}{20})^x.$$

(Dodawszy 2 po obu stronach)

$$2 \times (\frac{21}{20})^x = (\frac{21}{20})^x + 2.$$

(Odiawszy  $(\frac{21}{20})^x$  po obu stronach)  $(\frac{21}{20})^x = 2.$

(Wziawszy Logarytm obu stron)

$$x \text{ Log: } \frac{21}{20} = \text{Log: } 2.$$

$$\text{A że } \text{Log: } \frac{21}{20} = 0,0211893.$$

$$\text{A } \text{Log: } 2 = 0,3010300.$$

$$\text{Więc } x \times 0,0211893 = 0,3010300.$$

$$\text{a zatem } x = \frac{0,3010300}{0,0211893} = \frac{3010300}{211893} = 14 \text{ lat } 2\frac{1}{2} \text{ mie.}$$

sięy blisko.

Na końcu 14 lat, kapitał 10000 Cz: Zł: z procentem składanym po 5%, stałby się  $10000 \times (\frac{21}{20})^{14} = 19799$  Cz: Zł: blisko.

Procent od tego ostatniego kapitału za półtrzecią miesiąca jest prawie 206 Cz: Zł: które przydawszy do kapitału, będzie ze wszystkiem 20005 Cz: Zł: i to, jest ważność całego kapitału za lat 14, i blisko półtrzecią miesiąca.

Dochód

Dochód roczny 1000 Cz: Zł: z składanym procentem 5% przez lat 14, czyni sumę  $\frac{1000((\frac{21}{20})^{14}-1)}{\frac{21}{20}-1} = 20000((\frac{21}{20})^{14}-1) = 20000((\frac{21}{20})^{14}-1)$

20000 = 19598 Cz: Zł: blisko.

Procent od téj ostatniéj summy, za półtrzecia nieśliąca, jest prawie 204 Cz: Zł.

Część dochodu przypadająca na rok 15 sly za półtrzecia nieśliąca jest prawie 207 Cz: Zł:

Summę tych dwóch ostatnich liczb, dodawszy do wążności całego dochodu przez lat 14, wypadnie 20008 Cz: Zł: na wążność odpowiadającą bardzo blisko czasowi znalezionemu.

Wążność całą tego dochodu nie różni się od wążności, do której byłby przyszedł pierwiastkowy kapitał w tymże czasie, iak tylko 3 jednoszciami, względem blisko 20000; to jest mniej niż  $\frac{1}{6000}$  całego kapitału.

*Inszé przykłady.* Pewną osoba daie 12000 Cz: Zł: na przepadek, wymawiając sobie dochód roczny 5% (co wynoli 1080 Cz: Zł:) Za iléż lat wybierze tén kapitał wráz z procentami zgo 4%?

268. Zagadnienie 4. Winiéném komu dochód roczny 300 Cz: Zł: który przez 20 lat obowiązatem się wypłacać, teraz zaraz zaczynając, i rachując procent składany po 5%. Przez iakąż sumę mogą natychmiast tén cały dwudziestoletni dochód zaspokoić?

*Sposób iwszy postępowania.* Wążność tego dochodu, na początku 20stého roku, dodając 20 następnych wypłaczeń: będzie

$$300 \left( (\frac{21}{20})^{19} + (\frac{21}{20})^{18} + (\frac{21}{20})^{17} + \dots + 1 \right) = 300 \left( \frac{(\frac{21}{20})^{20} - 1}{\frac{21}{20} - 1} \right) = 6000 \left( \frac{21^{20} - 20^{20}}{20^{20}} \right) (\S. 267).$$

Niech będzie  $x$ , summa teraz zaraz wypłaconá, wyrównywaiącą tamtemu dochodowi. Ta summa na początku 20stého roku, albo na końcu 1989, wázyé będzie  $x \times (\frac{21}{20})^{19}$ .

$$\text{Warunek. } x \times (\frac{21}{20})^{19} = 6000 \times \frac{21^{20} - 20^{20}}{20^{20}}.$$

*Przerób:*



*Przerób:* (Rozmnr obie strony przez  $20^{19}$ )

$$x \times 21^{19} = 6000 \times \frac{21^{20} - 20^{20}}{20} = 300(21^{20} - 20^{20}).$$

Podzieliwszy obie strony przez  $21^{19}$

$$x = 300 \frac{(21^{20} - 20^{20})}{21^{19}} = 300 \times 21 - 300 \times \frac{20^{20}}{21^{19}} = 6300 - 6000 \times \left(\frac{20}{21}\right)^{19}.$$

A że  $6000 \times \left(\frac{20}{21}\right)^{19} = 2374$  blisko.

Więc  $6300 - 6000 \times \left(\frac{20}{21}\right)^{19} = 6300 - 2374 = 3926$  blisko.

I ta jest wartość dochodu szukaną.

*2gi przykład.* Gdyby ten dochód procentowy miał być nieustannym, tedyby winno się oddać kapitał tego dochodu, to jest 6000 Cz: Zł: których procenta po 5%, są 300 Cz: Zł. I oprócz tego, trzeba by dać jeszcze 300 Cz: Zł: ponieważ ten dochód ma się zaraz zaczynać, a nie dopiero za rok, trzeba by więc ze wszystkiem zapłacić 6300 Cz: Zł:

Ale że ten dochód przypada tylko wypłacić 20 razy; więc na początku 20tego roku, byłby wypłaconym: a zatem osoba, która używa tego dochodu, powinna oddać nazad 6000 Cz: Zł: przez lat 19, to jest powinna wypłacić wartość terażniejszą 6000 Cz: Zł: mających się wypłacać przez lat 19. Ta zaś wartość terażniejsza jest  $6000 \times \left(\frac{20}{21}\right)^{19} = 2374$  blisko.

Więc osoba, która winna ten dochód, powinna teraz zaraz wypłacić 6300 Cz: Zł. a nazad odebrać 2374: więc powinna w samej rzeczy wypłacić 3926 Cz: Zł:

*Inne przykłady.* Jaką jest wartość terażniejszą rocznego dochodu 500 Cz: Zł: mającego się wypłacać przez lat 30, rachując procent po 6%?

Jaką jest wartość terażniejszą rocznego dochodu 400 Cz: Zł: mającego się wypłacać przez lat 35, rachując procent po 4%?

269. Zagadnienie 5. Cały majątek pewnej osoby oszacowany jest na 100000 Zł. z którego ma dochodu rocznego 4%, to jest 4000 Zł.

Tęże osobie wychodzi corocznie na różne wydatki 10000 Zł. a co nad dochód roczny wydać, to jest 6000 Cz: Zł: tego inaczey pożyczyć nie może, iak z procentem 10%. Za ileż lat osoba ta zniszczy się wcale, przypuszczając, że wierzyciel dozwala zbierać się procentom składanym od tej summy 6000 Cz: Zł: którą następnie pożycza na początku każdego roku.

Ta osoba podług przypuszczenia musi corocznie przypożyczyć 6000 Zł. aby wystarczyć mogła, na coroczne swoje wydatki.

Niech będzie  $x$ , liczba lat szukana. Do 1800, (1800)  
Dług zaciągnięty na początku 180 roku, będzie na końcu lat  $x$

$$\begin{aligned} & 6000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^x \\ & \dots \dots \dots 2\text{go roku} \quad 6000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^{x-1} \\ & \dots \dots \dots 3\text{go roku} \quad 6000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^{x-2} \end{aligned}$$

$\dots \dots \dots 3\text{go roku} \quad 6000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^{x-2} = x$   
Więc wartość wszystkich tych długów, na końcu lat  $x$ , jest

$$\begin{aligned} & 6000 \left( \left(\frac{11}{10}\right)^x + \left(\frac{11}{10}\right)^{x-1} + \left(\frac{11}{10}\right)^{x-2} + \left(\frac{11}{10}\right)^{x-3} + \dots + \left(\frac{11}{10}\right)^0 \right) \\ & = (6000 \times \frac{11}{10} \times \left( \left(\frac{11}{10}\right)^{x-1} + \left(\frac{11}{10}\right)^{x-2} + \left(\frac{11}{10}\right)^{x-3} + \dots + 1 \right)) \\ & = (6000 \times \frac{11}{10} \times \left( \frac{\left(\frac{11}{10}\right)^x - 1}{\frac{11}{10} - 1} \right)) = 66000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^x - 66000 \end{aligned}$$

$$\text{Warunek. } 66000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^x - 66000 = 100000.$$

*Przerob:* (Dodawszy 66000 po obu stronach)

$$66000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^x = 166000.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 66000)

$$33 \times \left(\frac{11}{10}\right)^x = 83.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 33)

$$\left(\frac{11}{10}\right)^x = \frac{83}{33}.$$

(Wziąwszy Logarytm obu stron)

$$x \text{ Log: } \frac{11}{10} = \text{Log: } \frac{83}{33}.$$

$$\text{albo; } x \times 0,0413927 = 0,4005642.$$

$$0,4005642 \quad 4005642$$

$$\text{więc } x = \frac{0,4005642}{0,0413927} = \frac{4005642}{413927} = 9 \text{ lat, i co-}$$

kolwiek więcej niż 8 miesięcy.

Na końcu lat 9, dług tej osoby będzie  $6000 \left( \left(\frac{11}{10}\right)^9 + \left(\frac{11}{10}\right)^8 + \left(\frac{11}{10}\right)^7 + \right.$

$$\left. \dots + \left(\frac{11}{10}\right)^0 \right) = 6000 \times \frac{11}{10} \left( \frac{\left(\frac{11}{10}\right)^9 - 1}{\frac{11}{10} - 1} \right) = 66000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^9 - 66000 =$$

89625 Zł.

Procent od tej summy za 8 miesięcy, jest prawie 5955 Zł.

Póżyczanie na początku 1800 roku na 8 miesięcy 4000.

Procent za te 8 miesięcy . . . . . prawie 266.

Summa długów na końcu 9 lat, i ośmiu miesięcy . 99846.

Kapitał

Kapitał na końcu 9 lat . . . . .	89625 Zł.
Procent od tego kapit: za 9 miesięcy . . . . .	6722.
Pożyczanie na 9 miesięcy . . . . .	4500.
Procent za te 9 miesięcy . . . . .	337.

Summa cała . . . . . 101184.

Więc dług urośnie do 100000 Zł: za lat 9, i cokolwiek więcej niż 8 miesięcy.

*Inszé przykłady.* Majątek téj osoby niech będzie 150000 Zł. Wydatek roczny nad dochód, niech będzie 8000 Zł. a procent od nich 9%.

I znów, niech będzie majątek 200000 Zł. wydatek roczny z pożyczanych pieniędzy 10000 Zł. procent od nich 12%.

270. Zagadnienie-6. Znaleźć trzy liczby, w proporcji Geometrycznej ciągłej, których wiadomą jest summa, i summa ich kwadratów.

Niech będzie trzech liczb szukanych summa daná . . . . . 2f.

Summa ich kwadratów . . . . . 4q.

Niech będzie 2x summa dwóch skrajnych.

. . . . . 2y. Różnica tychże.

Dwa wyrazy skrajné  $x + y$ ,  $x - y$ .

Kwadrat średniégó . . . . .  $xx - yy$ ; Wyráz średni  $\sqrt{(xx - yy)}$

albo  $2f - 2x$ .

Kwadraty trzech wyrazów . . . . .  $xx + 2xy + yy$ .

$xx - yy$ .

$xx - 2xy + yy$ .

Summa trzech kwadratów . . . . .  $3xx + yy$ .

$$\text{Warunek. } \begin{cases} 3xx + yy = 4q. \\ xx - yy = (2f - 2x)^2 = 4f^2 - 8fx + 4xx. \end{cases}$$

*Przerób:* (Dodawszy strony odpowiadające sobie we dwóch równaniach)  $4xx = 4q + 4f^2 - 8fx + 4xx$ .

(Odiąwszy  $4xx$  po obu stronach)  $0 = 4q + 4f^2 - 8fx$ .

(Dodawszy  $8fx$  do obu stron)  $8fx = 4q + 4f^2$ .

(Podziel: obie strony przez  $4f$ )  $2x = \frac{q + f^2}{f}$ . Summa wy-

razów skrajnych.



$$2f - 2x = 2f - \frac{q + f}{f} = \frac{f - q}{f} \quad \text{Wyraz średni.}$$

Aby znaleźć dwa wyrazy skrajne, trzeba od kwadratu połowy ich sumy  $\left(\frac{q + f}{2f}\right)^2$  odjąć kwadrat wyrazu średniego  $\left(\frac{f - q}{f}\right)^2$ ; albo wieloczyn dwóch skrajnych. Reszta będzie kwadratem połowy ich różnicy, to jest:

$$\frac{qq + 2qf + f^4}{4f} - \frac{qq - 2qf + f^4}{4f} = \frac{10qf - 3(qq + f^4)}{4f} = \frac{4qf - 3(q - f)^2}{4f}.$$

Więc połowa różnicy dwóch skrajnych, jest  $\frac{V(4qf - 3(q - f)^2)}{2f}$

A zatem dwa wyrazy skrajne są

$$\frac{q + f}{2f} + \frac{V(4qf - 3(q - f)^2)}{2f}; \text{ i } \frac{q + f}{2f} - \frac{V(4qf - 3(q - f)^2)}{2f}$$

Proporcya szukana,

$$\frac{q + f}{2f} + \frac{V(4qf - 3(q - f)^2)}{2f}, \quad \frac{f - q}{f}, \quad \frac{q + f}{2f} - \frac{V(4qf - 3(q - f)^2)}{2f}$$

271. Uwaga. Można króćcy wynaléźć wyraz średni, albo i summe dwóch skrajnych, w sposób następujący:

Fig. 50.

Niech będzie AB, summa dana trzech ilości, niech PQ, wyraża linią, której kwadrat byłby równy summie kwadratów ilości trzech szukanych.

Niech linie AY, XY, wystawiają nam dwa wyrazy skrajne szukane, a linia BX, niech wystawia wyraz średni.

$$BX = AB - AX.$$

$$\text{Więc;} \quad BX^2 = AB^2 - 2AB \times AX + AX^2.$$

$$\text{A że jest } AX = AY + XY.$$

$$\text{Więc;} \quad AX^2 = AY^2 + 2AY \times XY + XY^2. \\ = AY^2 + 2BX^2 + XY^2 = BX^2 + PQ^2.$$

$$\text{Więc;} \quad BX^2 = AB^2 - 2AB \times AX + BX^2 + PQ^2.$$

$$\text{Więc;} \quad 0 = AB^2 - 2AB \times AX + PQ^2.$$

$$\text{Więc;} \quad 2AB \times AX = AB^2 + PQ^2.$$

a zatem,

a zatem,  $AX = \frac{AB^2 + PQ^2}{2AB}$ . Toż samo znaleźliśmy i pier-

wszym sposobem.

*Przykłady.* Niech będzie  $2f = 30$ ,  $2f = 14$ ,  $2f = 38$ ,

$$4f = 364, 4f = 84, 4f = 532,$$

Tymże prawie sposobem trzeba by sobie postąpić, gdyby wiadomy był nadmiar summy dwóch skrajnych, nad wyraz średni, i summa trzech kwadratów.

272. Zgodnie z 7. Znaleźć trzy liczby w proporcji geometrycznej ciągłej, których wiadome jest summa, i nadmiar summy kwadratów wyrazów dwóch skrajnych nad kwadrat wyrazu średniego.

Niech będzie  $2f$  summa daná;  $2q$ , różnica kwadratów.

*Mianowanie.* Summa wyrazów skrajnych . . . . .  $2x$ .

Różnica . . . . .  $2y$ .

Proporcja . . . . .  $x + y, 2f - 2x, x - y$ .

Kwadraty  $xx + 2xy + yy$ ;  $4f - 8f + 4xx$ ;  $xx - 2xy + yy$ .

Summa dwóch kwadratów skrajnych  $2xx + 2yy$ .

Nadmiar téj summy, nad kwadrat wyrazu średniego . . . .

$$8fx - 4f - 2xx + 2yy.$$

*Warunek* 
$$\begin{cases} 8fx - 4f - 2xx + 2yy = 2q. \\ 4f - 8fx + 4xx = xx - yy. \end{cases}$$

*Przerób:* 
$$\begin{cases} 4fx - 2f - xx + yy = q. \\ -8fx + 4f + 3xx + yy = 0. \end{cases}$$

(Odiąwszy 2gę równanie od pierwszego)

$$12fx - 6f - 4xx = q.$$

albo;  $4xx - 12fx + 6f + q = 0.$

(Dopełniwszy kwadratu w pierwszymi stronie)

$$4xx - 12fx + 9f = 3f - q.$$

(Wyciągnąwszy pier. w kwadr. z obu stron)

$$2x - 3f = \pm \sqrt{3f - q}.$$

(Dodawszy  $3f$  po obu stronach)

$$2x = 3f \pm \sqrt{3f - q}.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 2)

$$x = \frac{3f \pm \sqrt{3ff - q}}{2}$$

$$2f - 2x = -\sqrt{3ff - q}$$

Aby wyrażenie średni nie było ujemnym, trzeba użyć drugiego wyrażenia,

$$\text{toteż } x = \frac{3f - \sqrt{3ff - q}}{2}$$

$$2f - 2x = \sqrt{3ff - q} - f$$

$$xx - yy = (2f - 2x)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Więc, } yy = xx - (2f - 2x)^2 &= \left( \frac{3f - \sqrt{3ff - q}}{2} \right)^2 - (\sqrt{3ff - q} - f)^2 \\ &= \left( \frac{3f - \sqrt{3ff - q}}{2} \right)^2 - \left( \frac{2\sqrt{3ff - q} - 2f}{2} \right)^2 \\ &= \left( \frac{3f - \sqrt{3ff - q}}{2} + \frac{2\sqrt{3ff - q} - 2f}{2} \right) \left( \frac{3f - \sqrt{3ff - q}}{2} - \frac{2\sqrt{3ff - q} - 2f}{2} \right) \\ &= \frac{f + \sqrt{3ff - q}}{2} \times \frac{5f - 3\sqrt{3ff - q}}{2} = \frac{2f\sqrt{3ff - q} + 3q - 4f^2}{4} \end{aligned}$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{2f\sqrt{3ff - q} + 3q - 4f^2}}{2}$$

Wyrazy skrajne proporcji

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3f - \sqrt{3ff - q} + \sqrt{2f\sqrt{3ff - q} + 3q - 4f^2}}{2} \\ \frac{3f - \sqrt{3ff - q} - \sqrt{2f\sqrt{3ff - q} + 3q - 4f^2}}{2} \end{array} \right.$$

Wyrażenie średni . . . . .  $\sqrt{3ff - q} - f$

*Uwaga.* To zagadnienie wzięte oddzielnie może mieć cztery rozwiązania, które przez znaki tylko różnią się od siebie. Gdyby zaś, zamiast, co byśmy mieli szukać dwóch wyrazów skrajnych przez ich sumę, albo różnicę, chcieliśmy każdego z nich dochodzić bezśrednie; tedyby przyszło się do takiego równania, w którym ilość niewiadomych byłaby podniesioną do czwartego stopnia. Przy-



*Przykłady Zagadnienia poprzedzającego.*

Niech będzie  $2f=14$ ,  $2f=42$ .  
 $2g=52$ ,  $2g=468$ .

Tymże sposobem można by rozwiązać i następujące Zagadnienie: Znaleźć trzy liczby w proporcji Geometrycznej, których wiemy nadmiar summy dwóch skrajnych nad wyraz średni, i nadmiar summy kwadratów tychże dwóch skrajnych nad kwadrat wyrazu średniego.

Można także użyć do rozwiązania tych zagadnień sposobu drugiego użytego w poprzedzającym zagadnieniu.

273. Zagadnienie 8. Znaleźć cztery liczby, ciągło Geometrycznie proporcjonalne, których summa dwóch średnich jest 2a summa zaś dwóch skrajnych 2b.

Mianowanie. Różnica dwóch średnich . . . . .  $2d$ .  
 Dwa wyrazy średnie . . . . .  $a+d$ , i  $a-d$ .  
 Dwa skrajne . . . . .  $\frac{(a+d)^2}{a-d}$ , i  $\frac{(a-d)^2}{a+d}$

Warunek.  $\frac{(a+d)^2}{a-d} + \frac{(a-d)^2}{a+d} = 2b$ .

Przerób: (Przywiódłszy dwa ułamki pierwszemu strony, do jednakowego mianownika)  $\frac{(a+d)^3 + (a-d)^3}{aa-dd} = 2b$ .

(Wykonawszy oznaczone dodanie)  $\frac{2a^3 + 6add}{aa-dd} = 2b$ .

(Podzieliwszy obie strony przez 2)  
 $\frac{a^3 + 3add}{aa-dd} = b$ , albo  $a \left( \frac{aa + 3dd}{aa-dd} \right) = b$ .

(Ułożywszy to równanie w proporcję)  
 $aa + 3dd : aa - dd :: b : a$  (A).

(Rozmnożywszy obadwa następniiki przez 3)  
 $aa + 3dd : 3aa - 3dd :: b : 3a$ .

(Dodając)  $4aa : 3aa - 3dd = b + 3a : 3a$ . (§ 137)  
 albo  $4aa : aa - dd = b + 3a : a$  (B).

(Dzie-

(Dzieląc w proporcji A)  $4dd:aa-dd=b-a:a$ .  
 albo  $aa-dd:4dd=a:b-a$ .

Składając tę ostatnią proporcję, z proporcją B, będzie

$$4aa:4dd=b+3a:b-a.$$

$$\text{albo } aa:dd=b+3a:b-a.$$

$$\text{więc } dd=aa \times \frac{b-a}{b+3a}.$$

$$\text{a zaś } d=a\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}.$$

$$\text{Rozwiązanie. } a+d=a\left(1+\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right).$$

$$a-d=a\left(1-\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right).$$

$$\frac{(a+d)^2}{a-d} = \frac{(a+d)^3}{aa-dd} = a\left(1+\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right)^3 \cdot \frac{a(b+3a)\left(1+\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right)^3}{\frac{b-a}{b+3a}} = \frac{4a}{\frac{b-a}{b+3a}}.$$

$$\left(1+\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right)^3.$$

$$= (b+3a) \frac{b-a}{b+3a}.$$

$$\frac{(a-d)^2}{a+d} = \frac{(a-d)^3}{aa-dd} = a\left[1-\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right]^3 \cdot \frac{a(b+3a)\left(1-\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right)^3}{\frac{b-a}{b+3a}} = \frac{4a}{\frac{b-a}{b+3a}}.$$

$$\left(1-\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right)^3.$$

$$(b+3a) \frac{b-a}{b+3a}.$$

Sprawdz:

*Przykł:* Niech będzie  $2a = 36$ ;  $2b = 84$ .  
 $2a = 12$ ;  $2b = 18$ .  
 $2a = 24$ ;  $2b = 36$ .

Spółdziałanie jest prawie ten sam, co i w poprzedzającym Zada-  
niach.

4.	14.
8.	28.

Summa daná czterech wyrazów	a.
Summa ich kwadratów	b.

Wyrazy średnie . . .  $x+y$ .  
 $x-y$ .

Summa tego ciagu:  $2x + \frac{2x^3 + 6xyy}{xx - yy} = 2x \left( 1 + \frac{xx + 3yy}{xx - yy} \right) =$



$$2x \left( \frac{2xx + 2yy}{xx - yy} \right) = \frac{4x(xx + yy)}{xx - yy}.$$

*Kwadraty.*  $\frac{(x+y)^4}{(x-y)^2}, (x+y)^2, (x-y)^2, \frac{(x-y)^4}{(x+y)^2}.$

*Summa*

$$\frac{(x+y)^6 + (x-y)^6}{(xx - yy)^2} + (2xx + 2yy) = \frac{2x^6 + 30x^4yy + 30xx y^4 + 2y^6}{(xx - yy)^2} + (2xx + 2yy).$$

$$= (2xx + 2yy) \left( \frac{x^4 + 14xxyy + y^4}{(xx - yy)^2} + 1 \right) = (2xx + 2yy) \frac{(2x^4 + 12xxyy + 2y^4)}{(xx - yy)^2}$$

$$= (4xx + 4yy) \frac{(x^4 + 6xxyy + y^4)}{(xx - yy)^2}.$$

*Warunek.* 
$$\begin{cases} 4x \frac{(xx + yy)}{xx - yy} = a \text{ (A.)} \\ (4xx + 4yy) \frac{(x^4 + 6xxyy + y^4)}{(xx - yy)^2} = b. \text{ (B.)} \end{cases}$$

*Przerabianie.* (Podzieliwszy strony równania B, przez strony odpowiadające, równania A)

$$\frac{x^4 + 6xxyy + y^4}{x(xx - yy)} = \frac{b}{a} \text{ albo } \frac{(xx + yy)^2 + 4xxyy}{x(xx - yy)} = \frac{b}{a} \text{ (C.)}$$

(Przywiódłszy równanie A, do Mianownika równania C)

$$\frac{4xx(xx + yy)}{x(xx - yy)} = a \text{ (D.)}$$

(Odiąwszy równanie C, od równania D)

$$\frac{4x^4 - (xx + yy)^2}{x(xx - yy)} = a - \frac{b}{a}.$$

A że jest 
$$\frac{4x^4 - (xx + yy)^2}{x(xx - yy)} = \frac{2xx + (xx + yy)(2xx - (xx + yy))}{x(xx - yy)} =$$

(3xx

$$\frac{(3xx + yy)(xx - yy)}{x(xx - yy)} = \frac{3xx + yy}{x}$$

$$x(xx - yy)$$

$$\text{więc, } \frac{3xx + yy}{x} = a - \frac{b}{a} = \frac{aa - b}{a}$$

$$\text{więc, } 3xx + yy : aa - b = x : a$$

$$\text{A że, (w równaniu A)} \frac{4x(xx + yy)}{xx - yy} = a$$

$$\text{więc, } xx + yy : xx - yy = a : 4x$$

$$\text{a zatem, } xx : yy = a + 4x : a - 4x \quad (\S. 137.)$$

$$\text{więc, } 3xx : yy = 3(a + 4x) : a - 4x$$

$$\text{więc, } 3xx : 3xx + yy = 3(a + 4x) : 4a + 8x$$

$$\text{więc, } xx : 3xx + yy = a + 4x : 4(a + 2x)$$

$$\text{a że, } 3xx + yy : aa - b = x : a$$

$$\text{więc, } xx : aa - b = x(a + 4x) : 4a(a + 2x) \quad (\S. 139)$$

$$\text{więc, } x : a + 4x = aa - b : 4aa + 8ax$$

$$\text{więc, } 4aax + 8axx = a(aa - b) + 4x(aa - b)$$

$$\text{więc, } 8aax + 4bx = a(aa - b)$$

$$\text{więc, } xx + \frac{2a}{b}x = \frac{8}{aa - b}$$

$$\text{więc, } xx + \frac{2a}{b}x + \frac{bb}{16aa} = \frac{aa - b}{8} + \frac{bb}{16aa} =$$

$$\frac{2a^4 - 2aab + bb}{16aa} = \frac{a^4 + (aa - b)^2}{16aa}$$

$$x + \frac{4a}{b} = \frac{\sqrt{a^4 + (aa - b)^2}}{4a}$$

$$x = \frac{\sqrt{a^4 + (aa - b)^2} - b}{4a}$$

$$yy = xx \times \left( \frac{a - 4x}{a + 4x} \right) = \left( \frac{\sqrt{a^4 + (aa - b)^2} - b}{4a} \right)^2 \times \frac{aa + b - \sqrt{a^4 + (aa - b)^2}}{aa - b + \sqrt{a^4 + (aa - b)^2}}$$

Przykład. Niech będzie  $a = 40$ .

$$b = 820$$

$$\begin{aligned} aa &= 1600; & \begin{cases} aa-b=780. \\ (aa-b)^2=608400. \\ aa+b=2420. \end{cases} \\ a^4 &= 2560000; \end{aligned}$$

$$a^4 + (aa-b)^2 = 3168400.$$

$$\sqrt{a^4 + (aa-b)^2} = 1780.$$

$$x = \frac{1780 - 820}{2} = 6$$

$$yy = 6^2 \times \frac{2420 - 1780}{2} = 6^2 \times \frac{640}{2} = 6^2 \times \frac{64}{2} = 6^2 \times 32 = 36 \times 32 = 1152.$$

$$y = 33.$$

Wyrazy średnie . . .  $6+3$ . albo  $9$ .  
 $6-3$ .  $3$ .

Ciąg . . . 27, 9, 3, 1.

Insze przykłady.  $a=15$ .  $a=65$ .  
 $b=85$ .  $b=1261$ .

276. Zagadnienie 11. Znaleźć cztery liczby w ciągu geometrycznym mając wiadomą ich sumę, i nadmiar summy kwadratów wyrazów dwóch skrajnych nad summą kwadratów wyrazów dwóch średnich.

277. Zagadnienie 12. Znaleźć cztery liczby w ciągu geometrycznym, mając wiadomą różnicę summy wyrazów średnich, od summy wyrazów skrajnych, i różnicę summy kwadratów skrajnych, od summy kwadratów średnich.

278. Zagadnienie 13. Znaleźć cztery liczby w ciągu geometrycznym, mając wiadomą różnicę między summą skrajnych i summą średnich, i summę kwadratów wszystkich czterech wyrazów. (To Zagadnienie zawiera w sobie jedno równanie trzeciego stopnia.)

279. Następujące Zagadnienie w wielu przypadkach może być przełożone, a w szczególności w rachunkach dochodów dożywcotnych, z przypadków kapit. 10. (Takie dochody nazywają się po Francuzku *viagères*).

Niech będzie ciąg  $A$ .

rytmiczny . . .  $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d \dots a+(n-1)d$

Niech będzie ciąg

geometryczny . . .  $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, \dots p^{n-1}$ .

Rozmnożmy (po

biorąc) wyrazy tych

ciągów odpowiedni sobie,

zrobi się szereg następujący:  $a, ap+d, ap^2+2p^2d, ap^3+3p^3d, ap^4+4p^4d, ap^5+5p^5d$

. . .  $ap^{n-1} + (n-1)p^{n-1}d$ .

Trzeba



Trzeba znaleźć wyrażenie summy tego ostatniego szeregu.

Szereg ten może być rozłożony na następujące ciągi Jeometryczne, których można znaleźć wyrażenie summy,

$$a + ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + ap^5 + ap^6 + ap^7 + ap^8 + \dots + ap^{n-1} = a \times \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

$$dp + dp^2 + dp^3 + dp^4 + dp^5 + dp^6 + dp^7 + dp^8 + \dots + dp^{n-1} = dp \left( \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} \right)$$

$$dp^2 + dp^3 + dp^4 + dp^5 + dp^6 + dp^7 + dp^8 + \dots + dp^{n-1} = dp^2 \left( \frac{p^{n-2} - 1}{p - 1} \right)$$

$$dp^3 + dp^4 + dp^5 + dp^6 + dp^7 + dp^8 + \dots + dp^{n-1} = dp^3 \left( \frac{p^{n-3} - 1}{p - 1} \right)$$

$$dp^4 + dp^5 + dp^6 + dp^7 + dp^8 + \dots + dp^{n-1} = dp^4 \left( \frac{p^{n-4} - 1}{p - 1} \right)$$

$$dp^5 + dp^6 + dp^7 + dp^8 + \dots + dp^{n-1} = dp^5 \left( \frac{p^{n-5} - 1}{p - 1} \right)$$

$$dp^6 + dp^7 + dp^8 + \dots + dp^{n-1} = dp^6 \left( \frac{p^{n-6} - 1}{p - 1} \right)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$dp^{n-1} = dp^{n-1} \times \frac{p - 1}{p - 1}$$

Więc zebranie tego szeregu w jedną summy wychodzi na zebranie w jedną summy szeregów następującego.

$$a \times \frac{p^n - 1}{p - 1} + dp \times \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} + dp^2 \times \frac{p^{n-2} - 1}{p - 1} + dp^3 \times \frac{p^{n-3} - 1}{p - 1} + dp^4 \times \frac{p^{n-4} - 1}{p - 1} + \dots + dp^{n-1} \times \frac{p - 1}{p - 1}.$$

Opuśćmy pierwszy wyraz; a wykonamy oznaczone mnożenie, w drugich wyrazach będzie

$$\frac{dp^n - dp}{p-1} + \frac{dp^n - dp^2}{p-1} + \frac{dp^n - dp^3}{p-1} + \frac{dp^n - dp^4}{p-1} + \frac{dp^n - dp^5}{p-1} + \dots + \frac{dp^n - dp^{n-1}}{p-1}$$

$$\text{albo } \frac{n \times dp^n}{p-1} - \frac{dp}{p-1} (1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + \dots + p^{n-2}).$$

$$= n \times \frac{dp^n}{p-1} - \frac{dp}{p-1} \left( \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} \right).$$

Więc wyrażenie summy szukaney będzie

$$a \times \frac{p^n - 1}{p-1} + n \times \frac{dp^n}{p-1} - \frac{dp - dp^n}{(p-1)^2}.$$

*Uwaga.* Gdy  $p$ , jest mnieysze, od jedności, tedy należy wyrazić tę sumę pod tym kształtem  $a \times \frac{1-p^n}{1-p} - n \times \frac{dp^n}{1-p} + \frac{dp - dp^n}{(1-p)^2}.$

A granicą tego ostatniego postępowania, będzie  $a \times \frac{1}{1-p} + \frac{dp}{(1-p)^2}.$

## ROZDZIAŁ IX.

*Zagadnienia niewyznaczone, i wstęp do Zagadnień Diiofantycznych.*

**W**idzieliśmy już, że do tego, aby Zagadnienie jakie było wyznaczonem, tylé w niem powinno być ilości niewiadomych, ilé warunków, któreby iedné od drugich nie zawiły. Jeżeli tego nie będzie, tedy Zadanie uważane oddzielné, tylé mieć może rozwiązań; ilé tylko zechcemy. Atoli cel, do którego w szczególności zmiérza Zadanie, może znacznie ścieśnić liczbę rozwiązań, choćby Zagadnienie miało mniej warunków, niż ilości szukanych, iako to obaczmy na przykładach następujących.

280. *Zadanie 1.* Znaleźć wszystkie takie liczby, że gdy je podzielimy przez 2, zostanie 1, gdy zaś je podzielimy przez 3, nie nie zostanie.

*Arytmetycznie.* Ponieważ te liczby nie dają się dzielić przez 2, bez reszty, więc są nie parzyste. Ale, że te liczby mogą być podzielone przez 3; więc zamknięte będą w następującym ciągu.

3, 9, 15, 21, 33, 39, 45, 51, i t. d . . . . którego ogólnem wyrażeniem jest  $3+6a$ , gdzie  $a$ , oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą.

*Algebraicznie.* Niech  $x$ , oznacza liczbę tylu razy, ile jedna z liczb szukanych zawiera w sobie 2: a niech  $y$ , oznacza znowu liczbę tylu razy, ile też liczba szukana zawiera w sobie 3.

Będziemy mieli dwa wyrażenia następujące, liczby szukane . . . . .  
 $2x+1$ , i  $3y$ .

*Warunek.*  $2x+1=3y$ .

*Przerabianie.* (Odiawszy 1, po obu stronach)  $2x=3y-1$ .

(Podzieliwszy obie strony przez 2)

$$x = \frac{3y-1}{2} = y + \frac{y-1}{2}.$$

Ilość  $x$ , powinna wyrażać liczbę całkowitą: więc i oznaczenie ważności  $x$ , powinno wyrażać liczbę całkowitą: a że jedna część  $y$ , téj ważności,

powinna być liczbą całkowitą; więc i druga część  $\frac{y-1}{2}$ . musi także być

liczbą całkowitą. Niech będzie tą liczbą całkowitą liczba nie wyznaczona  $a$ , więc

$$\frac{y-1}{2} = a.$$

Podwoiwszy obie strony, będzie  $y-1=2a$ .

Dodawszy 1 do obu stron . . . .  $y = 2a+1$ .

a zatem  $3y = 6a+3$ . Wyrażenie liczby  
 szukanej.

To Zagadnienie przyjąć może nieokreśloną liczbę rozwiązań: iednakże liczba ich daleko jest mniejsza, niż gdyby się miało tylko względ na równanie warunku wziętego, i sposób wcale-ogólny, i oddzielny. Wszystkie tu wyłączają się ułamki, iako też i wszystkie liczby-ujemne, wszystkie ilości niespółmierne, i bezistotne. Wylaczają się nawet i te liczby całkowite i przydatne, których kształt inny jest, a nie  $6a+3$ .



*Inszé przykłady. Znaléżé wszystkie liczby podzielne przez 3, które gdy przez 4 podzielimy, zostanie 3.*

*Znaléżé wszystkie liczby podzielne przez 5, które gdy przez 4 podzielimy, zostanie 3.*

281. *Zadanie 2. Rachując kto jabłka zebrane w ogrodzie znajduje, iż licząc je,*

po 2 . . . . . zostało mu się 1.

.. 3 . . . . . 2.

.. 4 . . . . . 3.

.. 5 . . . . . 4.

.. 6 . . . . . 5.

.. 7 . . . . . 0.

*Ileż w samej rzeczy zebrał tych jabłek?*

1. *Przez rozumowanie.* Pierwszy warunek zawarty jest w trzecim. z którego wypada, że liczba jabłek jest nie parzysta.

2. Piąty warunek wypływa koniecznie z drugiego. Jakoż gdy liczba jabłka, jest podzielna przez 3; tedy podzieliwszy ją przez 6, albo nic nie zostanie, albo zostanie 3. Więc też gdy podzieliwszy liczbę jabłą przez 3, zostanie 2, tedy podzieliwszy ją przez 6, zostanie albo 2, albo 5. A że w pierwszym razie byłaby ta liczba parzysta; więc gdy jest nieparzysta, zostanie 5.

*Zadanie więc wypada na następujące:*

*Znaléżé wszystkie liczby podzielne przez 7, i takie, że gdy je podzielimy przez 6, zostanie 5.*

..... 5 . . . . . 4.

..... 4 . . . . . 3.

Jedna z liczby szukanéj, powinna się zamykać w ciągu następującym: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, i t. d.

Opuśćmy liczby parzyste, zostanie

7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, 119, 133, 147, i t. d.

Liczba szukaná powiększoná jednością, powinna być podzielna przez 6, 5, i 4.

Przydąmy więc 1 do każdej liczby ciągu poprzedzającego, a będzie 8, 22, 36, 50, 64, 78, 92, 106, 120, 134, 148, i t. d.

Opuśćmy te liczby, które nie są podzielne, np przez 5, to jest, które się nie kończą, albo na 0, albo na 5; zostaną z ciągu poprzedzającego tylko dwie liczby

liczby 50, i 120. Pierwszą z nich ani przez 6, ani przez 4 nie może być podzieloną; druga zaś wykonywać trzy ostatnie warunki, to jest dzielić ją trzy liczby 6, 5, i 4: a zatem liczba 110 jest liczbą w pierwszym ciągu odpowiadającą na zadanie; i czyni zadość wszystkim tego zadania warunkom.

Jeżeli do téj liczby dodamy liczbę podzieloną przez każdą z tych liczb 4, 5, i 7, (która to liczba będzie kształtu następującego  $420a$ ) wypadnie suma  $420a + 110$ ; która jest wyrażeniem ogólnym liczby szukaney, wzięwszy za  $a$ , iakąkolwiek liczbę całkowitą.

*Algebraicznie.* Niech  $x, y, z, v$ , wyrażają liczbę tylu razy, ile liczba szukaną powinna zamykać w sobie 3, 4, 5, 7.

Będziemy mieli cztery wyrażenia  $3x + 2, 4y + 3, 5z + 4, 7v$ , na liczbę szukaną.

*Warunek.*  $3x + 2 = 4y + 3$ .

$$\text{Przerób: } 3x = 4y + 1; x = \frac{4y + 1}{3} = y + \frac{y + 1}{3}.$$

$$\frac{y + 1}{3} = a; y + 1 = 3a; y = 3a - 1.$$

$4y + 3 = 12a - 1$ . Wyrażenie ogólne liczby odpowiadający dwóm pierwszym wyrażeniom.

*Warunek 2.*  $5z + 4 = 12a - 1$ .

$$\text{Przerób: } 5z = 12a - 5; z = \frac{12a - 5}{5} = 2a - 1 + \frac{2}{5}a.$$

$$\frac{2}{5}a = b; 2a = 5b; a = 2b + \frac{1}{2}b.$$

$$\frac{1}{2}b = c; b = 2c.$$

więc  $2a = 10c; a = 5c$ .

$5z + 4 = 60c - 1$ . Wyrażenie ogólne liczby odpowiadający trzém pierwszym wyrażeniom.

*Warunek 3.*  $7v = 60c - 1$ .

$$\text{Przerób: } v = \frac{60c - 1}{7} = 8c + \frac{4c - 1}{7}.$$

V v

$$\frac{4c-1}{7} = d; 4c-1=7d; 4c=7d+1.$$

$$c = d + \frac{3d+1}{4}$$

$$\frac{3d+1}{4} = e; 3d+1=4e; 3d=4e-1; d=e+\frac{e-1}{3}.$$

$$\frac{e-1}{3} = f; e-1=3f; e=3f+1.$$

$$d = e + \frac{e-1}{3} = 3f+1+f = 4f+1.$$

$$c = d + \frac{3d+1}{4} = 4f+1+e = 4f+1+3f+1 = 7f+2.$$

$$7v = 60c - 1 = 420f + 119.$$

Więc wyrażenie liczby szukaney, jest liczba iakakolwiek całkowita, wzięta razy 420, dodawszy do niey 119; nymniejszy zaś tą liczbą szukaną, jest 119

Inszé przykłady. Kupiono pewną liczbę łokci sukna po Zł: 8. i pewną inną liczbę po Zł: 13. Zapłacono za wszystkie łokcie pierwszego gatunku Zł: 75 więcéy niż za drugie.

Używa kto robotników mężczyzn i kobiet, płaci po gr: 15 każdemu mężczyźnie, a po gr: 11 każdej kobiecie, więcéy zaś wydał 81 gr: na mężczyzn niż na kobiety.

282: Zadanie 3. Niech będzie dany ułamek  $\frac{113}{355}$ .

Trzeba znaleźć drugi ułamek  $\frac{x}{y}$  taki, aby różnica tych dwóch ułam-

ków przywiedzionych do jednakowego mianownika, miała za licznika liczbę całkowitą daną d.

$$\text{Warunek. } \frac{113}{355} - \frac{x}{y} = \pm \frac{d}{355y}$$

$$\text{Przerabianie. } \frac{113y - 355x}{355y} = \pm \frac{d}{355y}$$

więc,



więc,  $113y - 355x = \pm d$ .

$$113y = 355x \pm d.$$

$$y = \frac{355x \pm d}{113} = 3x + \frac{16x \pm d}{113}.$$

$$\frac{16x \pm d}{113} = a. \text{ Liczba całkowita,}$$

$$16x \pm d = 113a; 16x = 113a \mp d; x = \frac{113a \mp d}{16} = 7a + \frac{a \mp d}{16}$$

$$\frac{a \mp d}{16} = b. \text{ Liczba całkowita, } a \mp d = 16b; a = 16b \pm d.$$

$$16x = 113(16b \pm d) \mp d = 113 \times 16b \pm 112d.$$

$$x = 113b \pm 7d.$$

$$113y = 355x \pm d = 355(113b \pm 7d) \pm d = 355 \times 113b \pm 2486d.$$

$$y = 355b \pm 22d.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{113b \pm 7d}{355b \pm 22d}.$$

Przykł: Niech będzie  $b=0, d=1, \frac{x}{y} = \frac{7}{22}; \frac{1 \mp 7}{22} = \frac{1}{22 \times 355}.$

Niech będzie  $b=1, d=1.$

wtedy  $\frac{x}{y} = \frac{120}{377};$  (gdy weźmiemy pierwszy znak +)

$\frac{x}{y} = \frac{106}{377};$  (gdy weźmiemy drugi znak —)

$$\frac{120}{377} - \frac{106}{377} = \frac{1}{355 \times 377}.$$

$$\frac{106}{377} - \frac{120}{377} = \frac{1}{333 \times 355}.$$

Niech znowu będzie jednostajnie  $b=1$ ; a zaś niech będzie  $d$ , kolejno . . . 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . . 16. Weźmy raz wraz znak drugi —, wy-

V v ■

wypadną następujące ułamki  $\frac{99}{311}$ ,  $\frac{92}{289}$ ,  $\frac{85}{267}$ ,  $\frac{78}{245}$ ,  $\frac{71}{223}$ ,  $\frac{64}{201}$ ,  $\frac{57}{179}$ ,  $\frac{50}{157}$ ,  
 $\frac{43}{135}$ ,  $\frac{36}{113}$ ,  $\frac{29}{91}$ ,  $\frac{22}{69}$ ,  $\frac{15}{47}$ ,  $\frac{8}{25}$ ,  $\frac{1}{3}$ . Których to ułamków różnice względem  
 pierwszego ułamku  $\frac{113}{311}$  będą następujące:

2	3	4	16
$355 \times 311$	$355 \times 289$	$355 \times 267$	$3 \times 355$

Tym sposobem postępowania znawdziemy ciąg ułamków, których wyrazy mniejsze są od wyrazów ułamka danego, i które tym bardziej się zbliżają do równości z tymże ułamkiem; im ich wyrazy mniej się od niego różnią; a w szczególności znaleźliśmy dwa ułamki  $\frac{7}{22}$ , i  $\frac{106}{333}$ , pierwszy mniejszy, a drugi większy, od ułamka danego: ale tak mała jest różnica, że przewiodłszy je osobno, wraz z danym ułamkiem do jednakowego mianownika, pierwszego z nich licznik mniejszy jednością, drugiego zaś licznik większy jednością tylko będzie od licznika ułamka danego. Co się też zgadza z tem co się powiedziało w Części I Geometrii, §. 398 i nast. o sfosunkach przybliżonych okręgów koła do średnicy jego.

283. Zadanie 4. Niech będzie ułamek dziesiętny 2, 336; który oznaczają prawie pierwiastek kwadratowy liczby 5. Trzeba znaleźć ułamki zwyczajne przybliżające się do wartości tego pierwiastku kwadratowego.

Ułożywszy ułamek dany w tym kształcie  $\frac{2336}{1000}$ , albo w tym  $2 + \frac{236}{1000}$ , albo nakoniec w tym  $2 + \frac{59}{250}$ , szukać będziemy ułamków, któreby się zbliżały do tego ułamku  $\frac{59}{250}$ , i któreby miały mniejsze od niego wyrazy,

Znajdziemy tymże jak wyżej sposobem:

$$\frac{x}{y} = \frac{59b + 21d}{250b + 89d}$$

Niech będzie  $b=0$ ,  $d=1$ .

Wypadnie stąd ułamek  $\frac{21}{89}$  bardzo przybliżający się do ułamku  $\frac{59}{250}$ .

Niech będzie  $b=1$ ,  $d=1$ , i weźmy znak niższy —, wypa-

nie ułamek  $\frac{38}{161}$ .

. . . . .  $b=1$ ,  $d=2$ , . . . . .  $\frac{17}{72}$ .

. . . . .  $b=2$ ,  $d=3$ , . . . . .  $\frac{55}{213}$ .

. . . . .  $b=2$ ,  $d=5$ , . . . . .  $\frac{13}{55}$  it.d.

Albo tak;





284. Zadanie 5. Kupił kto pewną liczbę łokci sukna po Zł. 12, i znowu kupił inną liczbę łokci innego gatunku sukna po Zł. 17. Zapłacił za wszystko Zł. 479.

Iląż sposobami mogło się stać to kupno, przypuszczając, że liczba łokci sukna obojga gatunków była całkowitą?

Mianowanie. Niech będzie liczba łokci sukna po Zł. 12 . . .  $x$ .

. . . . . 17 . . .  $y$ .

Zapłata za wszystkie łokcie igo sukna. . . . 12 $x$ .

. . . . . 280. . . . 17 $y$ .

Warunek.  $12x + 17y = 479$ .

Przerabianie.  $12x = 479 - 17y$  :

$$x = \frac{479 - 17y}{12} = 39 - y + \frac{n - 5y}{12} = 39 - y + \frac{5y - n}{12}$$

Ponieważ  $x$ , powinno być liczbą całkowitą; więc  $39 - y + \frac{5y - n}{12}$

powinno także być liczbą całkowitą.

A że  $39 - y$ , jest liczbą całkowitą, jeżeli  $y$ , jest liczbą całkowitą;

więc także  $\frac{5y - n}{12}$ , powinno być liczbą całkowitą.

Niech będzie  $\frac{5y - n}{12} = a$ , liczba całkowita.

więc, . . .  $5y - n = 12a$ .

$$5y = 12a + n$$

$$y = \frac{12a + n}{5} = 2a + 2 + \frac{2a + 1}{5}$$

Przez rozumowanie podobne poprzedzającemu, będzie  $\frac{2a + 1}{5} = b$ .

liczba całkowita,

$$2a + 1 = 5b$$

$$2a = 5b - 1$$

$$a =$$

$$a = \frac{5b-1}{2} = 2b + \frac{b-1}{2}.$$

$$\frac{b-1}{2} = c, \text{ liczba całkowita.}$$

□

$$b-1 = 2c.$$

$$b = 2c+1.$$

$$a = 2b+c = 5c+2.$$

$$y = 2a+2+b = 12c+7.$$

$$x = 39 - y - a = 39 - (12c+7) - (5c+2) = 39 - (17c+9) = 30 - 17c.$$

$$\text{Rozwi\k{z}: } x = 30 - 17c; \dots 12x = 360 - 12 \times 17c.$$

$$y = 12c + 7; \dots 17y = 119 + 12 \times 17c.$$

$$\text{Sprawdzenie. } 12x + 17y = 479.$$

W Zagadnieniach poprzedzających ostatnie, liczba rozwiązań była nieograniczona: ponieważ można było ilości niewyznaczonej, w której wiadome ilości były wyrażone dać taką wartość całkowitą i przydatną, jaką byśmy tylko chcieli. W zadaniach zaś gatunku takiego, jak ostatnie zadanie, liczba rozwiązań jest ograniczoną.

Jakoż aby  $y$ , było przydatnym; trzeba do tego, aby można odjąć  $17c$  od  $30$ , więc  $17c$  nie powinno być większe od  $30$ , a zatem  $c$ , nie powinno być większe od  $\frac{30}{17}$ , albo od  $1\frac{13}{17}$ .

Aby także  $x$ , było przydatnym, trzeba do tego, aby  $12c+7$  nie było mniejsze od  $0$ , więc  $12c$  nie powinno być mniejsze od  $-7$ , a zatem  $c$ , nie powinno być mniejsze od  $-\frac{7}{12}$ . A zatem, wartość  $c$ , jest między  $-\frac{7}{12}$  i  $1\frac{13}{17}$ . A że  $c$ , być ma liczbą całkowitą; a między  $-\frac{7}{12}$  i  $1\frac{13}{17}$  dwie tylko są liczby całkowite  $0$ , i  $1$ , więc dwie tylko mogą być wartości odpowiadające na zadanie, to jest  $0$ , i  $1$ .

Rozwiązania szczególne, które tylko same odpowiadają Zagadnieniu. 
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 30 \text{ albo } 13. \\ y = 7 \text{ albo } 19. \end{array} \right.$$

$$12x = 360 \quad . \quad . \quad . \quad 156.$$

$$17y = 119 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad 323.$$

$$12x + 17y = 479 \quad . \quad . \quad . \quad 479.$$

Inszé

*Inszé przykłady.* 30 Mężczyzn, i 17 kobiet odebrało razem w nagrodę roboty Zł: 509. Ileż jest sposobów, któremi możnaby zapłacić każdemu mężczyźnie i każdej kobiecie, aby jednak summa zawsze jednakową wychodziła?

Kupiono pewną liczbę łokci sukna po 25 Zł: i pewną liczbę łokci materji po Zł: 7: zapłacono ze wszystkiém Zł: 995.

Kupiono 40 sztuk bydła, to jest wołów, krów, i owiec.

Każdy wół kosztował . . . . . Zł: 120.

. . . . krowa . . . . . 90.

. . . . Owca . . . . . 24.

Dano za wszystko Zł: . . . . . 2838.

285. Zadanie 6. Znaleźć wszystkie sposoby, któremi boki prostokąta mogą być wyrażone w liczbach całkowitych, tak jednak, aby zawsze obwód tego prostokąta, tyle zawierał zwyczajnych stóp, ile powierzchnia jego zawiera stóp kwadratowych.

*Mianowanie* Niech będą boki prostokąta . . .  $x$ . i  $y$ .

Obwód jego . . . . .  $2x + 2y$ .

Powierzchnia . . . . .  $xy$ .

*Warunek*  $xy = 2x + 2y$ .

*Przerabianie.*  $xy - 2x = 2y$ ; albo  $x(y - 2) = 2y$ .

więc  $x = \frac{2y}{y-2}$ . Licznik  $2y$  jest tu dwa razy tak wielki, jak pier-

wszy mianownika wyraz  $y$ . Dodamy, i odezwiemy od tego licznika drugi wyraz mianownika podwójnie wzięty; będzie

$$x = \frac{2y - 4 + 4}{y - 2} = \frac{2y - 4}{y - 2} + \frac{4}{y - 2} = \frac{4}{y - 2}.$$

Aby  $x$ , było liczbą całkowitą, trzeba aby też  $\frac{4}{y-2}$  było liczbą cał-

kowitą, więc 4 powinno być podzielne przez  $y - 2$ : a zatem  $y - 2$  powinno równać się jednemu z dzielników liczby 4:

A że takimi dzielnikami są trzy liczby, 1; 2; 4; więc wartości  $y$ , są trzy, 3, 4, 6, a wartości  $x$ , odpowiadające tamtych są 6, 4, 3.



Dwa więc Rozwiązania ma Zadanie, to jest bok jeden prostokąta ma 3 stopy, a drugi 6: albo tak jeden iak i drugi ma 4 stopy.

*Inszé przykłady.* Powierzchnia prostokąta powinna zawierać 2, 3, 4, i t. d. razy tylé stóp kwadratowych, ilé stóp zwyczajnych zawiera obwód tegoż prostokąta.

Niech znnowu będzie Równoległoscian prostokątny, którego jeden bok ma 3 stopy. Znaleźć dwa inné boki tego równoległoscianu w liczbach całkowitych, tak jednak, aby bryłowatość jego, tylé stóp sześciennych zawierała, ilé powierzchnia jego zawiera stóp kwadratowych.

286. Zadanie 7. Znaleźć wszystkie sposoby napełnienia miejsca, które jest na płaszczyźnie około iakięgo punktu, używając do tego samych tylko kątów wielokątów foremnych.

Widzieliśmy w Części I. Jeom: §. 88, że używając kątów wielokątów foremnych jednego gatunku, trzy tylko były sposoby napełnienia niemi miejsca na płaszczyźnie około iakięgo punktu, to jest że to miejsce napełnić się może.

- 6 kątami trójkąta prostokątného.

4 kątami kwadratu.

i 3 kątami sześciokąta foremného.

Więcý jednak jest sposobów napełnienia tego miejsca, gdy użyjemy kątów, wielokątów foremnych różného gatunku: któreto sposoby wšytlkie teraz wyliczymy.

1. Użyjemy 4 kątów trójkąta równoboczného: miejsce niemi napełnione, zawierać będzie 4 razy  $\frac{2}{3}$  kąta prostého, albo 2  $\frac{2}{3}$  kąta prostého: zostanie jeszcze do napełnienia  $1\frac{1}{3}$  kąta prostého, którą to ważność ma w sobie 1 kąt sześciokąta foremného.

2. Użyjemy trzech kątów trójkąta równoboczného: zostaną jeszcze do napełnienia dwa kąty proste, co tylko wykonać potrafią dwa kąty kwadratu: ponieważ każdy kąt wielokąta, mającého więkšzą liczbę boków od kwadratu, jest též więkšzy niż kąt prosty.

3. Użyjemy dwóch kątów trójkąta równoboczného, i jedného kąta kwadratu: zostanie jeszcze do napełnienia  $1\frac{2}{3}$  kąta prostého. Więc kąt zewnętrzny wielokąta foremného, którego kąt wewnętrzny użyć trzeba, do napełnienia tego miejsca, wazyć będzie  $\frac{4}{3}$  kąta prostého, albo  $\frac{1}{3}$  czterech kątów prostych. A że ważności kąta zewnętrznego wielokąta foremného, dochodzimy dzieląc 4 kąty proste przez liczbę boków wielokąta foremného, (Część I. Jeom: § 86. i następ.) więc liczba boków wielokąta, którego użyć trzeba do dopełnienia miejsca tego jest 12.

Jeżeli, oprócz dwóch boków trójkąta równobocznego, użyjemy kąta pięciokąta, (którego wartość jest  $1\frac{1}{5}$  kąta prostego) zostanie jeszcze do napełnienia  $1\frac{1}{5}$  kąta prostego. Więc kąta zewnętrznego wielokąta użyć się mającego, powinniśmy mieć  $\frac{8}{5}$  kąta prostego, albo  $\frac{2}{5}$  czterech kątów prostych: co w żadnym wielokącie foremnym być nie może. Jeżeli zaś na miejsce kąta pięciokąta, użyjemy kąta sześciokąta foremnego, który wazy  $1\frac{1}{3}$  kąta prostego; tedy zostanie jeszcze do napełnienia  $1\frac{1}{3}$  kąta prostego, co także wykona jeden kąt, sześciokąta foremnego.

Co do wielokątów trzymających większą liczbę boków od sześciokąta: dwa ich kąty wazy więcej niż dwa kąty sześciokąta, a zatem wraz z dwoma kątami trójkąta równobocznego, nie mogą napełnić miejsca na płaszczyźnie około jakiego punktu.

4. Użyjemy jednego tylko kąta trójkąta równobocznego. Jeżeli, oprócz tego, użyjemy jednego jeszcze kąta kwadratu; zostaną do napełnienia  $2\frac{1}{2}$  kąta prostego: żaden zaś kąt na to się nie zdá ze wszystkich wielokątów, których liczba boków jest większą nad 6. Jeżeli przydamy drugi kąt kwadratu; zostanie do napełnienia  $1\frac{1}{2}$  kąta prostego, którego wartość jest 1 kąt sześciokąta.

Gdyby użyłszy 1 kąta trójkąta równobocznego, i kąta 1 kwadratu, użyliśmy jeszcze 1 kąta pięciokąta; zolałby do napełnienia  $1\frac{2}{5}$  kąta prostego: czego żaden z kątów wielokąta foremnego wykonać nie może. Nakoniec jeżeli z dwoma pierwszemi kątami, użyjemy kąta sześciokąta foremnego; tedy czwarty kąt dopełniający miejsce, będzie kątem kwadratu, tak, jak już wyżej widzieliśmy.

Niech znowu, oprócz kąta Trójkąta równobocznego, drugi kąt będzie Pięciokąta foremnego, (jeżeli to być może). W takim razie zostaną do napełnienia  $2\frac{2}{5}$  kąta prostego: czego żaden z kątów Wielokątów wyższych nad pięciokąt, nie dokáže: bo lubo taki Wielokąt miałby każdy kąt większy, niż  $1\frac{1}{5}$  kąta prostego: ale zawsze mniejszy niż 2 kąty proste.

Niech jeszcze, oprócz kąta Trójkąta równobocznego, drugi kąt będzie Sześciokąta: zostaną do napełnienia 2 kąty proste: czego żaden kąt Wielokątów wyższych od Sześciokąta dokazać nie może, ale tylko dwa kąty kwadratu, iako to już wyżej pokazaliśmy.

Gdyby naostatek z kątem 1 Trójkąta równobocznego, chcieliśmy użyć innych kątów, z których każdy należałby do Wielokąta wyższego nad sześciokąt; tedy, ponieważ trzy takie kąty większe są od 4 kątów prostych, nie trzeba by ich tylko dwa do napełnienia miejsca pozostałego.

Niech

Niech będą  $m$  i  $n$ , liczby boków w tych dwóch Wielokątach.

Każdy kąt ich wazyć będzie w kątach prostych  $2 - \frac{4}{m}$ , i  $2 - \frac{4}{n}$ .

(Część I. Jeometrii §. 85.)

*Warunek.*  $\frac{2}{3} + 2 - \frac{4}{m} + 2 - \frac{4}{n} = 4.$

*Przerabianie.*  $\frac{2}{3} - \frac{4}{m} - \frac{4}{n} = 0.$

albo,  $\frac{2}{3} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} = 0.$

więc,  $\frac{2}{3} = \frac{2}{m} + \frac{2}{n} = \frac{2n+2m}{mn}$ ; a zatem  $\frac{mn}{3mn} = \frac{6n+6m}{3mn}$ .

więc,  $mn = 6n + 6m.$   
 $mn - 6m = 6n.$

$m = \frac{6n}{n-6} = \frac{6n-36}{n-6} + \frac{36}{n-6} = 6 + \frac{36}{n-6}.$

Dzielnikami liczby 36, są 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Więc ważnościami ilości  $n-6$ , mogą być niektóre z tych liczb: ważności zaś odpowiadające ilości  $n$ , są 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42, a ważności odpowiadające ilości  $m$ , będą 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7.

Co daie pięć różnych sposobów napełnienia miejsca, około punktu trzema kątami Wielokątów foremnych, z których jeden tylko byłby kątem Trójkąta równobocznego.

5. Jeżeli użyjemy 3, albo dwóch kątów kwadratu; tedy miejsce pozostałe będzie napełnione w pierwszym razie przez 1 kąt kwadratu, w drugim zaś razie, albo przez dwa kąty kwadratu, albo przez 1 kąt Trójkąta prostokątnego i kąt sześciokąta.

Jeżeli użyjemy 1 kąta kwadratu; tedy zostaną jeszcze do napełnienia 3 kąty proste: które to miejsce napełnione być powinno najwięcej przez 2 kąty Wielokątów wyższych od kwadratu.

Niech będą  $m$ , i  $n$ , liczby boków tych Wielokątów.

Ich kąty wazyć będą w kątach prostych.



$$2 - \frac{4}{m}, \text{ i } 2 - \frac{4}{n}, \text{ albo } 4 - \left( \frac{4}{m} + \frac{4}{n} \right).$$

Warunek.  $4 - \left( \frac{4}{m} + \frac{4}{n} \right) = 3.$

Przerób:  $1 - \left( \frac{4}{m} + \frac{4}{n} \right) = 0.$

$$1 = \frac{4}{m} + \frac{4}{n}.$$

albo;  $\frac{mn}{mn} = \frac{4n + 4m}{mn}.$

więc,  $mn = 4n + 4m.$

a zatem  $mn - 4m = 4n.$

albo;  $m(n - 4) = 4n.$

więc  $m = \frac{4n}{n-4} = \frac{4n-16}{n-4} + \frac{16}{n-4}.$

Dzielniki liczby 16, to jest wartości ilości  $n - 4,$

$f_2: \dots \dots \dots 1, 2, 4, 8, 16.$

Wartości odpowiadające ilości  $n \dots \dots \dots 5, 6, 8, 12, 20.$

Wartości odpowiadające ilości  $m \dots \dots \dots 20, 12, 8, 6, 5.$

Więc używszy jednego tylko kąta kwadratu, trzy są sposoby napełnienia miejsca pozostałego dwoma kątami wielokątów foremnych, to jest jednym kątem Pięciokąta, i jednym Dwudziestokąta; jednym kątem Sześciokąta, i jednym Dwunastokąta; i dwoma kątami Ośmiokąta.

6. Jeżeli użyjemy jednego kąta Pięciokąta, tedy miejsce pozostałe, powinno się napełnić przez dwa także kąty.

Niech będą  $m$ , i  $n$ , liczby boków Wielokątów, których kąty powinny napełnić miejsce pozostałe. Wartości tych kątów są,  $2 - \frac{4}{m}$ , i  $2 - \frac{4}{n}$ ;

których summa jest  $4 - \left( \frac{4}{m} + \frac{4}{n} \right).$  A że ta summa powinna wazyć w kątach prostych  $4 - \left( 1\frac{1}{2} \right)$ ; więc

$$4 - \left( \frac{4}{m} + \frac{4}{n} \right) = 4 - \left( 1\frac{1}{2} \right).$$

albo  $\frac{4}{m} + \frac{4}{n} = \frac{5}{2}.$

$$20m + 20n = 6mn.$$

$$6mn - 20m = 20n.$$

$$m(6n - 20) = 20n.$$

$$m = \frac{20n}{6n - 20} = \frac{10n}{3n - 10}.$$

A że  $\frac{10n}{3n - 10}$  powinno być liczbą całkowitą; więc także liczba całkowitą będzie  $\frac{30n}{3n - 10}$ . Że zaś  $\frac{30n}{3n - 10} = \frac{30n - 100}{3n - 10} + \frac{100}{3n - 10} = 10 + \frac{100}{3n - 10}$

Więc  $\frac{100}{3n - 10}$  powinno też być liczbą całkowitą; a zatem  $3n - 10$ , powinno być dzielnikiem liczby 100.

A że dzielnikiem liczby 100.

są . . . . . 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

więc  $3n - 10 = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.$

$3n = 11, 12, 14, 15, 20, 30, 35, 60, 110.$

A wartości całkowite ilości  $n$ , są . . . 4, 5, 10, 20.

Wartości odpowiadające ilości  $m$  . . . 20, 10, 5, 4.

Więc dwa są sposoby napełnienia miejsca około punktu trzema kątami, z których jeden byłby kątem Pięciokąta. Pierwszy z tych sposobów, już był wyżej wynaleziony: w drugim używamy dwóch kątów Pięciokąta, i jednego kąta Dziesięciokąta.

7. Nie zosłaie już, tylko użyć jeszcze trzech kątów Sześciokąta: ponieważ każdy kąt Wielokąta mającego więcej niż 6 boków większy jest niż kąt sześciokąta; a zatem trzy jakiegokolwiek kątów Wielokątów wyższych od Sześciokąta, wazyłyby więcej niż 4 kąty proste. Ponieważ zaś każdy kąt jakiegokolwiek Wielokąta forénnego wazy mniéj niż 2 kąty proste; więc trzeba przynajmniéj trzech kątów Wielokątów forénnych do napełnienia miejsca około punktu.

*Powtórzenie. Sposoby napełnienia miejsca około punktu na płaszczyźnie, przez kąty Wielokątów foremnych.*

Napełnią to miejsce.

1. 6 Kątów Trójkąta równobocznego.
2. 4 Kąty Trójkąta równobocznego i kąt Sześciokąta.
3. 3 Kąty Trójkąta równobocznego i 2 kąty kwadratu.
4. 2 Kąty Trójk: równob: i kąt kw: i 1 kąt Dwunastokąta.
5. 2 . . . . . i 2 kąty Sześciokąta.
6. 1 Kąt Troyk: równob: 2 kąty kw: i 1 kąt Sześciokąta.
7. . . . . i 1 kąt Siedmiokąta, i 1 kąt Cztérdziest:
8. . . . . i 1 kąt Ośmiokąta, i 1 kąt Dwudziestoczwar.
9. . . . . i 1 kąt Dziewięć: i 1 kąt Osimnastokąta.
10. . . . . i 1 kąt Dziesięciok: i 1 kąt Piętnastokąta.
11. . . . . 2 kąty Dwunastokąta.
12. 4 Kąty kwadratu.
13. 1 Kąt kwadratu, 1 Pięciokąta, i 1 Dwudziestokąta.
14. . . . . i Sześciokąta, i 1 Dwunastokąta.
15. . . . . i 2 Ośmiokąta.
16. 2 Kąty Pięciokąta, i 1 Dziesięciokąta.
17. 3 Kąty Sześciokąta.

Z tych różnych sposobów niektóre takie są, że używszy ich do napełnienia miejsca około punktu, można je dalej ciągnąć do przykrycia iakięgo miejsca na płaszczyźnie, i mogą być przytósowane w Budownictwie domowym. I takie są z pomiędzy wzwyż wyliczonych, 1 wśzy, 12y, 14y, 15y, 17.

287. Zadanie 7. Znaleźć trzech boków Trójkąta prostokątnego takie wyrażenia, aby boki té były spółmiérné.

Mian: Niech będą  $x$ , i  $y$ , dwa ramiona kąta prostego tego Trójkąta. Summa kwadratów tych 2 ramiön, albo kwadrat przeciwprostokątnéy, będzie  $xx + yy$ .

Aby przeciwprostokątna, była spółmiérną, trzeba do tego, żeby to wyrażenie  $xx + yy$  było kwadratem.

Niech będzie  $x + v$  pierwiastkiem tego kwadratu.

Warunek.  $xx + yy = (x + v)^2$ .

Przeróbienie.  $xx + yy = xx + 2vx + vv$ .

$yy = 2vx + vv$ .

$2vx = yy - vv$ .



$$x = \frac{yy - vv}{2v}$$

$$xx = \frac{y^4 - 2vvy + v^4}{4vv}$$

$$xx + yy = \frac{y^4 + 2vvy + v^4}{4vv} = \left( \frac{yy + vv}{2v} \right)^2$$

Więc gdy  $y$ , i  $v$ , są ilościami spółmiernými, to i trzech boków Trójkąta prostokątnego wyrażenia, któreby té boki spółmiernými oznaczyły będą

$y, \frac{yy - vv}{2v}$ , i  $\frac{yy + vv}{2v}$ . A zatem té trzy boki są do siebie, iak té trzy ilości  $2vy, yy - vv$ , i  $yy + vv$ .

*Przykłady.* Niech będzie  $y = 2; v = 1$ .

W takim razie 3 boki będą 4, 3, 5,

Niech będzie  $y = 3; v = 2$ .

W takim razie 3 boki będą 12, 5, 13.

238. *Przystosowanie.* Znaleźć wyrażenia spółmierné iakiegokolwiek Trójkąta takié, aby wysokość jego, a zatem i powierzchnia i promień koła wpisanego, i opisanego, były także wyrażone spółmiernie.

To Zagadnienie łatwo przywieść do poprzedzającego.

Jakoż oznaczywszy wysokość Trójkąta przez  $y$ , a dwa odcinki podstawy, które czyni prostopadłą, oznaczywszy przez  $\frac{yy - vv}{2v}$ , i  $\frac{yy + vv}{2x}$  dwa

inne boki będą, ieden  $\frac{yy + vv}{2v}$ , drugi  $\frac{yy + xx}{2x}$ . Podstawa oznaczona będzie

przez sumę albo przez różnicę dwóch odcinków  $\frac{yy - vv}{2v}$ , i  $\frac{yy + xx}{2x}$ ,

toieft przez  $\frac{x(yy - vv) \pm v(yy - xx)}{2vx}$ ; (przez sumę, gdy prostopadła przy-

pada na samą podstawę, przez różnicę, gdy prostopadła przypada na przedłużenie podstawy.) A zatem trzy boki Trójkąta, i wysokość, będą do siebie iak té wyrażenia  $x(yy - vv) \pm v(yy - xx)$ ; (albo  $(yy - vx)(x \pm v)$ ),  $x(yy + vv)$ ,  $v(yy + xx)$ , i  $2vxy$ ; gdzie  $x, y, v$ , znaczą ilości spółmierné i całkowite.

Wyra-

Wyrażenie powierzchni  $vxy(x(yy-vv) \pm v(yy-xx))$ .

$$= vxy(yy-vx)(x \pm v).$$

Wyrażenie promienia koła wpisanego wypadnie z podzielenia powierzchni, przez połowę obwodu, i będzie

$$\frac{vxy(yy-vx)(x+v)}{xy} \quad \text{albo} \quad \frac{vxy(yy-vx)(x-v)}{xy}$$

$$\frac{xyy + vyy}{vx(yy-vx)} \quad \text{albo} \quad \frac{xyy + vxx}{vy(yy-vx)(x-v)}$$

to jest  $\dots\dots\dots \frac{y}{y} \quad \text{albo} \quad \frac{yy+vx}{yy+vx}$

Wyrażenie promienia koła opisanego, wypadnie stąd, iż Prostokąt z średnicy przez wysokość, równa się Prostokątowi ze dwóch boków: a zatem wyrażenie średnicy, będzie równe wyrażeniu Prostokąta ze dwóch boków, podzielonemu przez wyrażenie wysokości, a połowa tego wszystkiego będzie

$$\text{wyrażeniem promienia koła opisanego, to jest } \frac{x(yy+vv) \times v(yy+xx)}{4vxy} = \frac{(yy+vv)(yy+xx)}{4y}$$

*Przykład.* Niech będzie  $y=3, v=1, x=2$ .  
Będą boki Trójkąta  $2(3) \pm 1 \times 5; 2(10); 1(13)$ .  
to jest  $\frac{2}{1}; 20 \ 13$ .

Wysokość 12.

Promień koła wpisanego  $\frac{4}{3}$ ; albo 3,

Promień koła opisanego  $\frac{6}{5}$ .

Wyrażenia całkowite (rozmnożywszy wszystkie poprzedzające przez

6) będą

Podstawa  $\frac{1}{6} \frac{2}{6}$ . Boki 120; 78. Wysokość 72.

Promień koła wpisanego  $\frac{2}{1} \frac{8}{8}$  koła opisanego 65.

Powierzchnia  $\frac{4}{2} \frac{5}{3} \frac{3}{7} \frac{6}{6}$ .

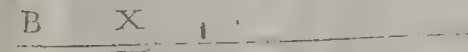
Zadania gatunku takiego, iakiemu jest poprzedzające, w których rzeczyć idzie o to, aby dokazać tego, iżby podane ilości, były kwadratami, nazywane są *Zagadnieniami Diiofantycznymi*, od nazwiska Matematyka, którego pozostawiło jedno całe dzieło w téj materji. Gdybyśmy mieli obślerniey nią się zatrudniać, przechodziłoby to zamiar tych początków Algiebry. Kto zechce więcéy w téj mierze nabydź wiadomości niech czyta Algiebrę SAUNDERSONA, a mianowicie: drugi Tom Algiebry EULERA, gdzie znajdzie dokładnie to, czego żąda.

KONIEC ALGIEBRY.

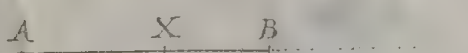
*Fig 1.*



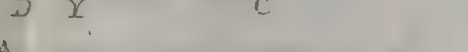
*Fig 4.*



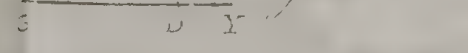
*Fig 7.*



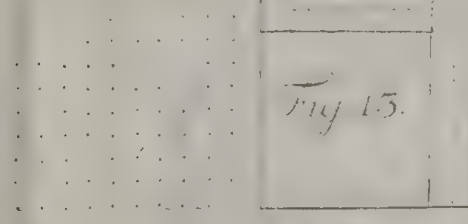
*Fig 8.*



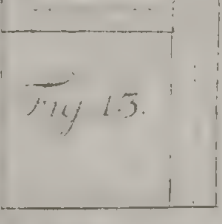
*Fig 10.*



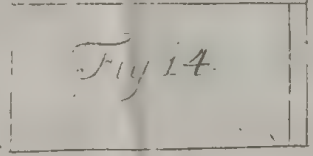
*Fig 12.*



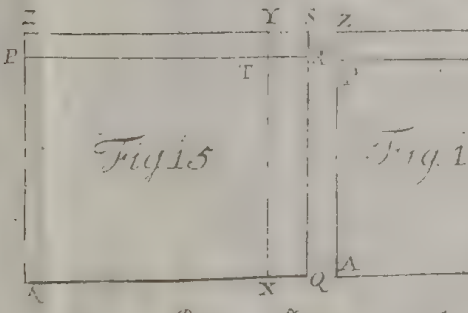
*Fig 13.*



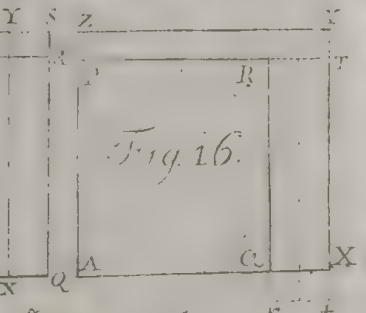
*Fig 14.*



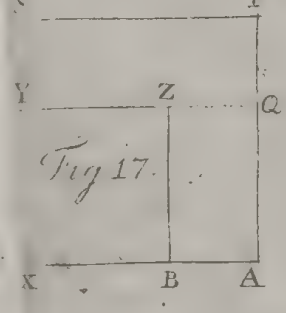
*Fig 15.*



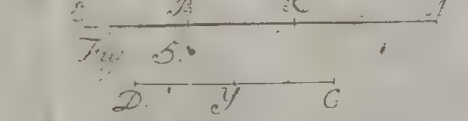
*Fig 16.*



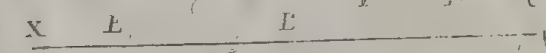
*Fig 17.*



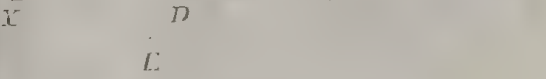
*Fig 5.*



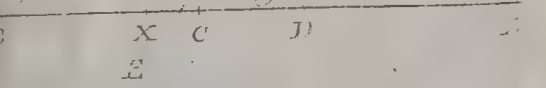
*Fig 3.*



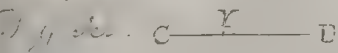
*Fig 6.*



*Fig 9.*



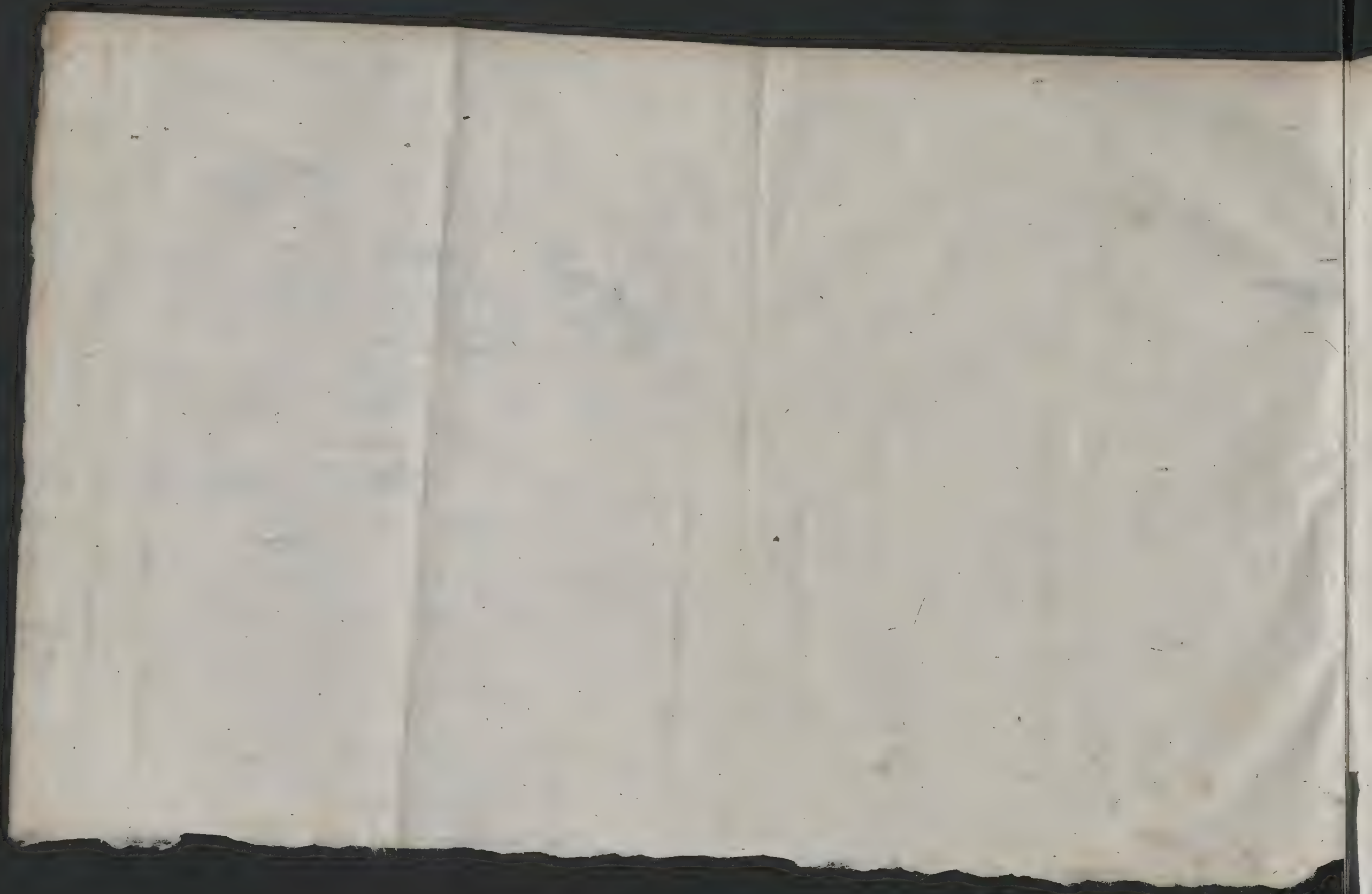
*Fig 11.*

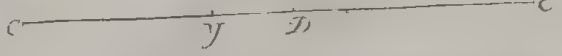
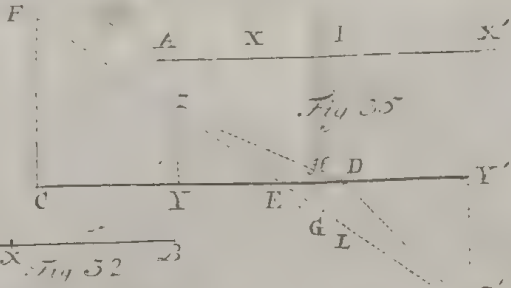
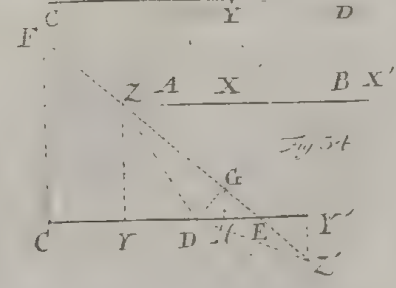
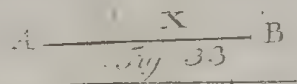
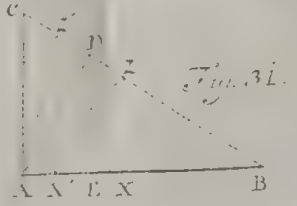
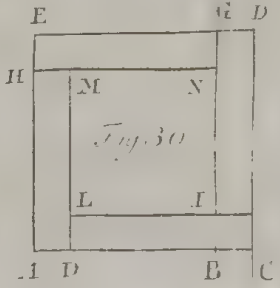
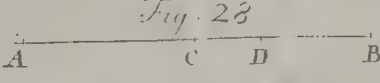
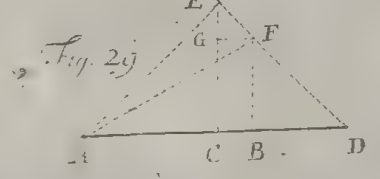
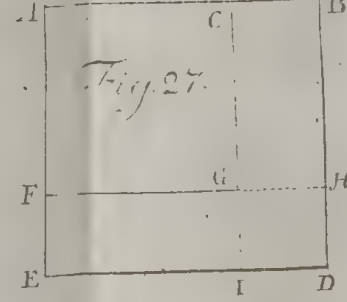
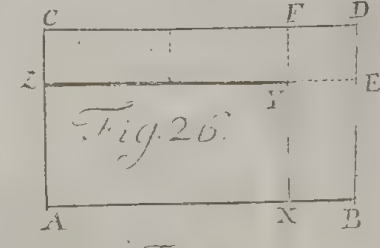
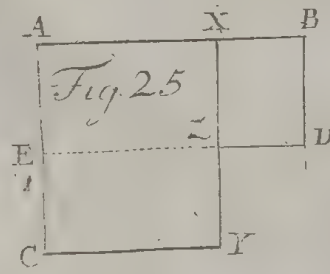
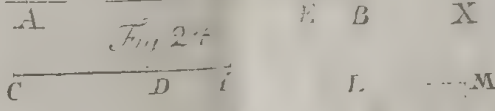
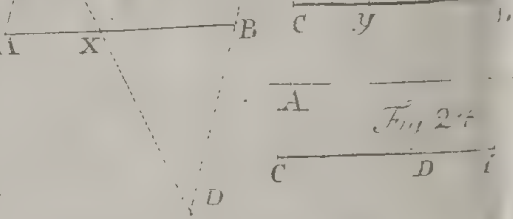
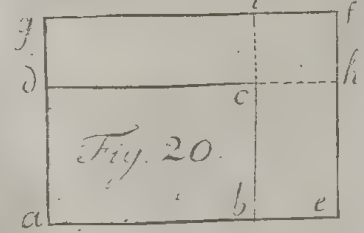
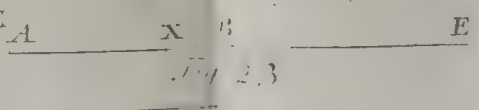
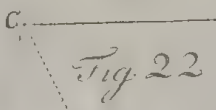
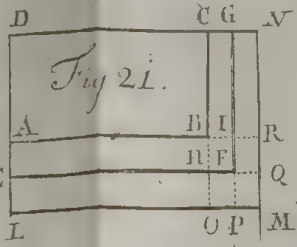
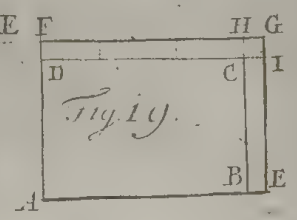
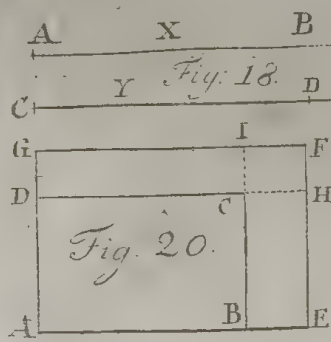


*Fig 2.*



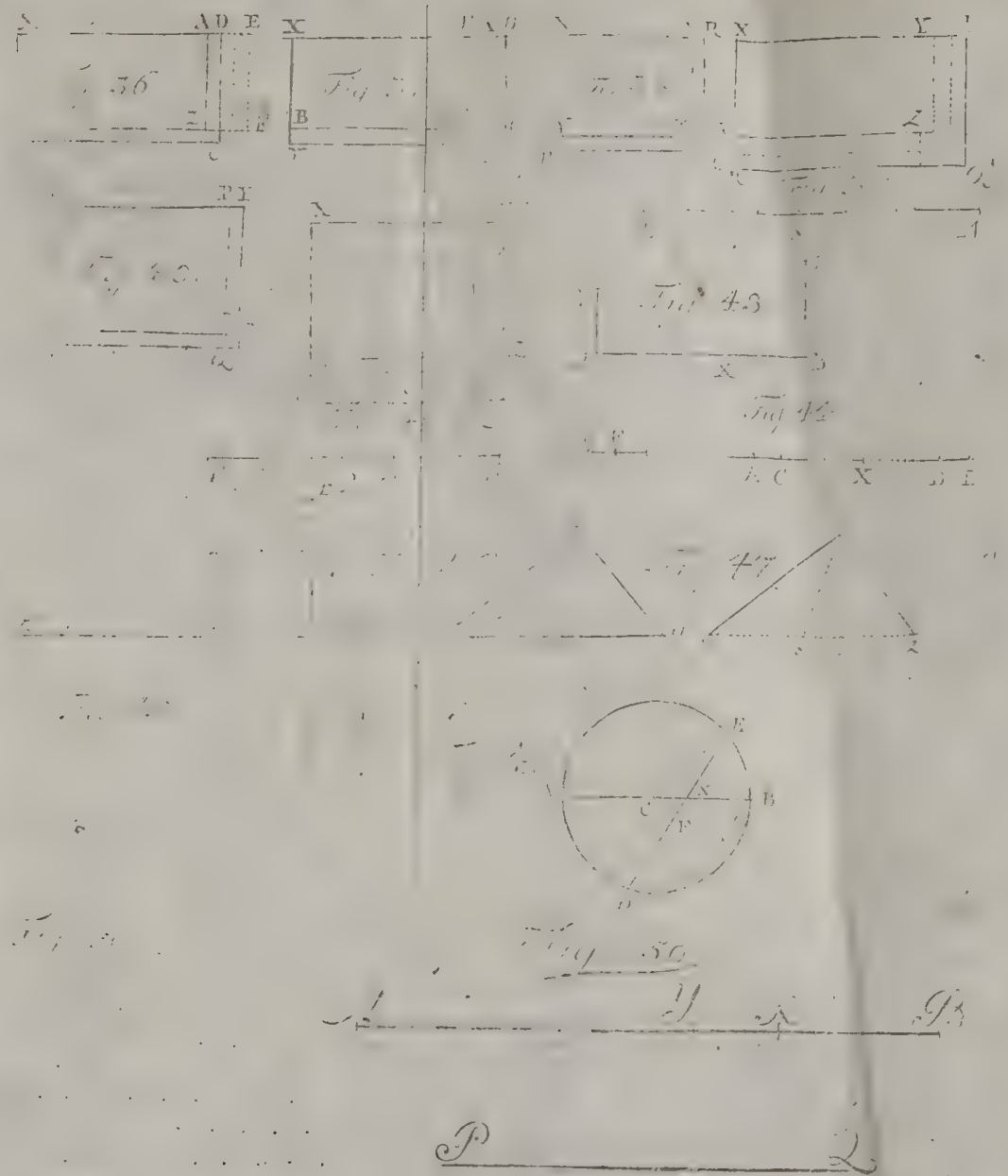


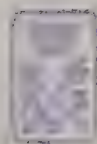


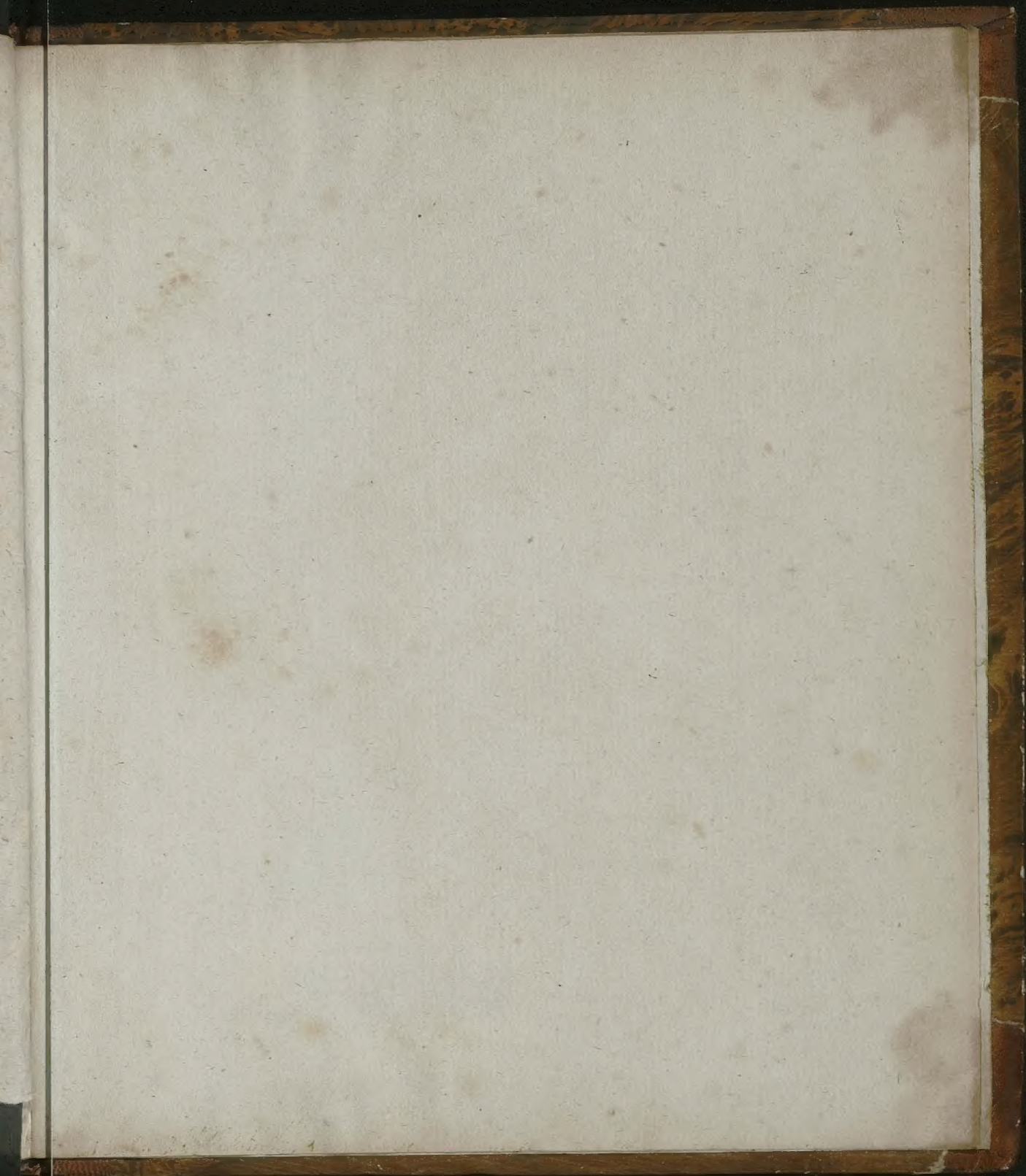




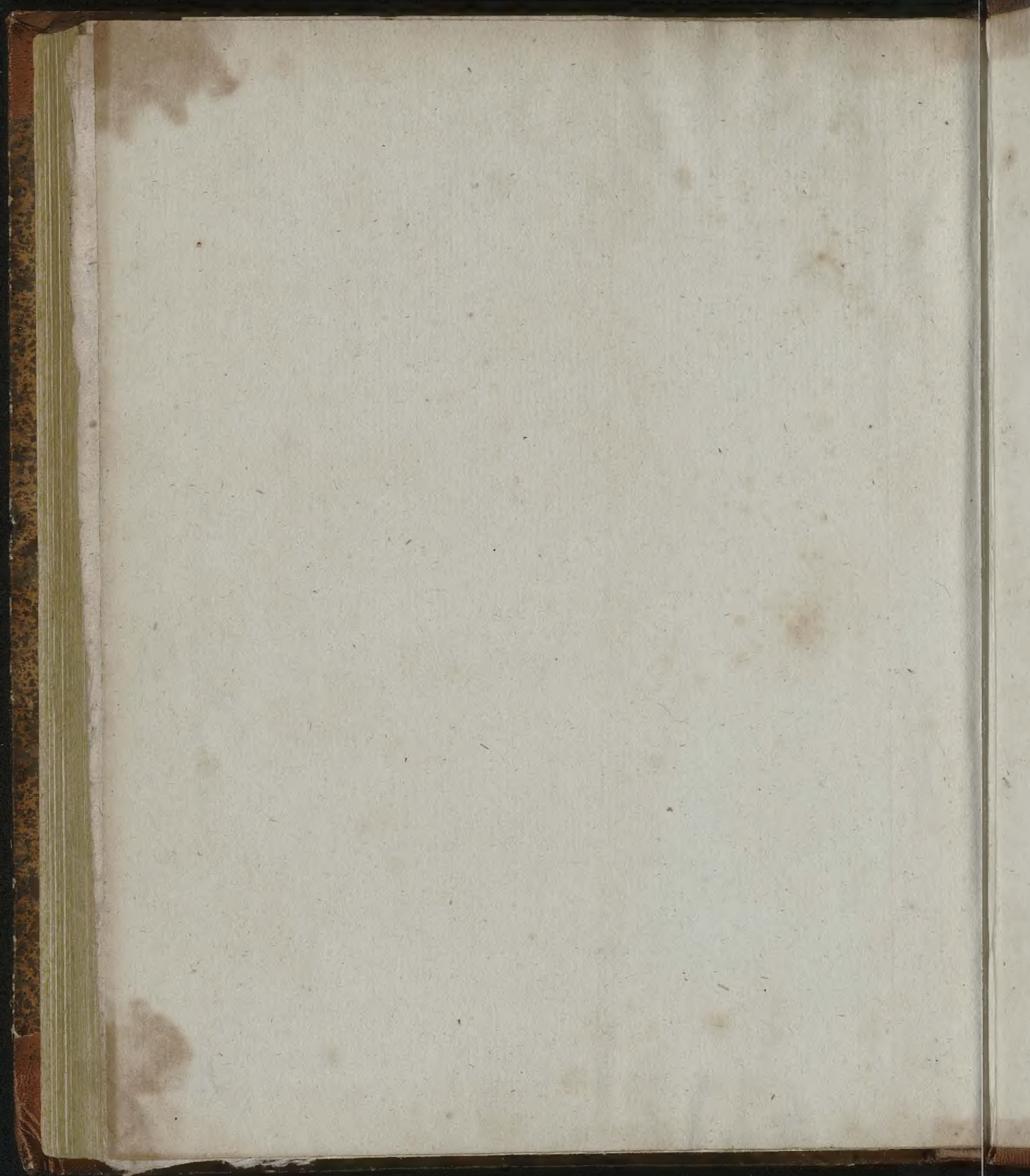














Biblioteka Jagiellońska



stdr0013168



